

Тема: Полное исследование функции

ЗАДАНИЕ. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y = \ln \frac{x+1}{x+2}$$

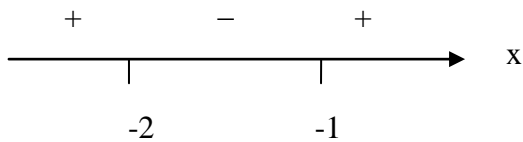
РЕШЕНИЕ:

1) Область определения функции

$$\frac{x+1}{x+2} > 0,$$

$$(x+1)(x+2) > 0,$$

$$x_1 = -1, x_2 = -2.$$



То есть $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \ln \frac{x+1}{x+2} = \ln \left(\frac{-1}{-0} \right) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \ln \frac{x+1}{x+2} = \ln \left(\frac{+0}{1} \right) = -\infty.$$

Получаем, что $x = -1$ и $x = -2$ - вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения с осями координат:

$$Ox: y = \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = 0, \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} = 1, x+1 = x+2, \text{ нет решений.}$$

$$Oy: x = 0, \Rightarrow y = \ln \left(\frac{0+1}{0+2} \right) = -\ln 2 \approx -0,69. \text{ Точка } (0, -0,69).$$

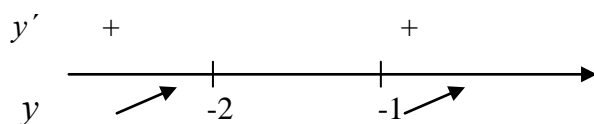
3) Функция общего вида, так как

$$y(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x+2} = \ln \frac{x-1}{x-2} \neq \pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x) = \left(\ln \frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{x+2}{x+1} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{x+2}{x+1} \frac{x+2 - (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} \frac{x+2-x-1}{(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

Находим критические точки: $x_1 = -1, x_2 = -2$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

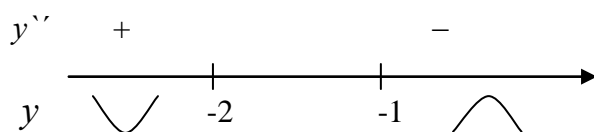


Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -2), (-1; +\infty)$. Экстремумов нет.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x) = \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} \right)' = -\frac{x+1+x+2}{(x+1)^2(x+2)^2} = -\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}.$$

Находим критические точки: $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -1,5$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.



Функция выпукла вниз на $(-\infty; -2)$, выпукла вверх на $(-1; +\infty)$.

6) Горизонтальная асимптота:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1+1/x}{1+2/x} = 0,$$

Асимптота $y = 0$.

7) Строим график функции, отметим ключевые точки:

