

Тема: Полное исследование функции

ЗАДАНИЕ. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y = \frac{e^x}{x}$$

РЕШЕНИЕ:

1) Область определения функции: $x \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Вычислим односторонние пределы в $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{-0} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Таким образом, $x = 0$ - вертикальная асимптота.

2) Точки пересечения с осями координат:

$$Ox: y = \frac{e^x}{x} = 0, \text{ нет решений.}$$

$$Oy: x = 0 \notin D(y).$$

Нет точек пересечения с осями.

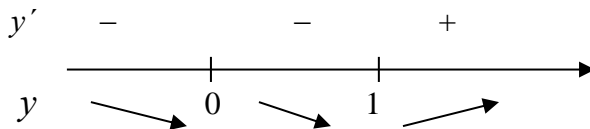
3) Функция общего вида, так как

$$y(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} = -\frac{e^{-x}}{x} \neq \pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x) = \left(\frac{e^x}{x} \right)' = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Находим критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

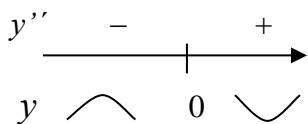


Функция убывает на интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, возрастает на интервале $(1; +\infty)$. Функция имеет минимум в точке $x = 1$, $y(1) = e \approx 2,7$.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x) = \left(\frac{e^x(x-1)}{x^2} \right)' = \frac{e^x(x-1+1)x^2 - e^x(x-1)2x}{x^4} = e^x \frac{(x)x - (x-1)2}{x^3} = e^x \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}.$$

Находим критические точки: $x = 0$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вниз на интервале $(0; +\infty)$, выпукла вверх на интервале $(-\infty; 0)$.

б) Асимптоты.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = \infty,$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2} = 0,$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1} = 0.$$

Получили горизонтальную асимптоту $y = 0$.

7) Строим график функции, отметим ключевые точки (локальный минимум):

