

Тема: аналитическая геометрия на плоскости

ЗАДАНИЕ. Даны вершины $A(1;1)$, $B(7;5)$, $C(4;5)$ треугольника. Найдти:

- 1) длину стороны AB ;
- 2) внутренний угол A в радианах с точностью до $0,01$;
- 3) уравнение высоты, проведенной через вершину C ;
- 4) уравнение медианы, проведенной через вершину C ;
- 5) точку пересечения высот треугольника ;
- 6) длину высоты, опущенной из вершины C ;
- 7) систему линейных неравенств, определяющую внутреннюю область треугольника.

Сделать чертеж.

РЕШЕНИЕ.

1) Найдем длину стороны AB по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

2) Найдем уравнения сторон AB и AC .

Сторона AB :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A},$$

$$\frac{x-1}{7-1} = \frac{y-1}{5-1},$$

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{4},$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2},$$

$$2x-2 = 3y-3,$$

$$2x+1 = 3y,$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \text{ угловой коэффициент } k_{AB} = \frac{2}{3}.$$

Сторона AC :

$$\frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A},$$

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{5-1},$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4},$$

$$4x-4 = 3y-3,$$

$$3y = 4x-1,$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}, \text{ угловой коэффициент } k_{AC} = \frac{4}{3}.$$

Тогда внутренний угол A можно найти по формуле:

$$\operatorname{tg} A = \left| \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB}k_{AC}} \right| = \left| \frac{2/3 - 4/3}{1 + 8/9} \right| = \frac{6}{17}, \text{ откуда } A = \operatorname{arctg} \frac{6}{17} \approx 0,34 \text{ рад.}$$

3) Найдем уравнение высоты CD , проведенной через вершину C . Так как высота CD перпендикулярна прямой AB , ее уравнение имеет вид:

$$y - y_C = -\frac{1}{k_{AB}}(x - x_C),$$

$$y - 5 = -\frac{3}{2}(x - 4),$$

$$2y - 10 = -3x + 12,$$

$$2y + 3x - 22 = 0.$$

4) Найдем уравнение медианы CM , проведенной через вершину C .

Для этого найдем середину стороны AB , точку M :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 7}{2} = 4, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3.$$

Тогда медиана CM имеет уравнение:

$$\frac{x - x_C}{x_M - x_C} = \frac{y - y_C}{y_M - y_C},$$

$$\frac{x - 4}{4 - 4} = \frac{y - 5}{3 - 5},$$

$$\frac{x - 4}{0} = \frac{y - 5}{-2},$$

$$x = 4.$$

5) Найдем точку пересечения высот треугольника. Для этого найдем уравнение еще одной высоты BE , проведенной через вершину B . Так как высота BE перпендикулярна прямой AC , ее уравнение имеет вид:

$$y - y_B = -\frac{1}{k_{AC}}(x - x_B),$$

$$y - 5 = -\frac{3}{4}(x - 7),$$

$$4y - 20 = -3x + 21,$$

$$4y + 3x - 41 = 0.$$

Найдем точку K пересечения высот из системы:

$$\begin{cases} 2y + 3x - 22 = 0, \\ 4y + 3x - 41 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + 3x = 22, \\ 2y = 19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 19, \\ x = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 9,5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 9,5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 9,5. \end{cases}$$

Точка $K(1; 9,5)$.

6) Найдем длину высоты CD , опущенной из вершины C . Это расстояние от вершины $C(4;5)$ до прямой $AB: 2x+1-3y=0$, поэтому

$$CD = \frac{|2x_C + 1 - 3y_C|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2 \cdot 4 + 1 - 3 \cdot 5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

7) Запишем систему линейных неравенств, определяющую внутреннюю область треугольника.

Для этого найдем уравнение стороны BC :

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B},$$

$$\frac{x - 7}{4 - 7} = \frac{y - 5}{5 - 5},$$

$$\frac{x - 7}{-3} = \frac{y - 5}{0},$$

$$y = 5.$$

Теперь подставляем в уравнение прямых точки (вершины треугольника), чтобы выделить ту полуплоскость, в которой лежит треугольник:

Сторона $AB: 2x+1-3y=0$, подставляем точку $C(4;5): 8+1-15 < 0$

Сторона $BC: y-5=0$, подставляем точку $A(1;1): 1-5 < 0$

Сторона $AC: 3y-4x+1=0$, подставляем точку $B(7;5): 15-28+1 < 0$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 2x+1-3y < 0, \\ y-5 < 0, \\ 3y-4x+1 < 0. \end{cases}$$

Сделаем чертеж.

