Тема: аналитическая геометрия на плоскости

Задание. *Даны вершины* $A(1;1)$, $B(7;5)$, $C(4;5)$ *треугольника. Найти:*

1) *длину стороны* AB;
2) *внутренний угол* A *в радианах с точностью до 0,01;*
3) *уравнение высоты, проведенной через вершину* C;
4) *уравнение медианы, проведенной через вершину* C;
5) *точку пересечения высот треугольника;*
6) *длину высоты, опущенной из вершины* C;
7) *систему линейных неравенств, определяющую внутреннюю область треугольника.*

Сделать чертеж.

Решение.

1) Найдем длину стороны AB по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

2) Найдем уравнения сторон AB и AC.

Сторона AB:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A},$$

$$\frac{x-1}{7-1} = \frac{y-1}{5-1},$$

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{4},$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2},$$

$$2x - 2 = 3y - 3,$$

$$2x + 1 = 3y,$$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, угловой коэффициент $k_{AB} = \frac{2}{3}$.

Сторона AC:

$$\frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A},$$

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{5-1},$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4},$$

$$4x - 4 = 3y - 3,$$

$$3y = 4x - 1,$$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$, угловой коэффициент $k_{AC} = \frac{4}{3}$.

Тогда внутренний угол A можно найти по формуле:

$\operatorname{tg} A = \left|\frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB}k_{AC}}\right| = \left|\frac{2/3 - 4/3}{1 + 8/9}\right| = \frac{6}{17}$, откуда $A = \operatorname{arctg}\frac{6}{17} \approx 0,34$ *рад.*

3) Найдем уравнение высоты CD, проведенной через вершину C. Так как высота CD перпендикулярна прямой AB, ее уравнение имеет вид:

$$y - y_C = -\frac{1}{k_{AB}}(x - x_C),$$

$$y - 5 = -\frac{3}{2}(x - 4),$$

$$2y - 10 = -3x + 12,$$

$$2y + 3x - 22 = 0.$$

4) Найдем уравнение медианы CM, проведенной через вершину C.
Для этого найдем середину стороны AB, точку M:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+7}{2} = 4, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Тогда медиана CM имеет уравнение:

$$\frac{x - x_C}{x_M - x_C} = \frac{y - y_C}{y_M - y_C},$$

$$\frac{x-4}{4-4} = \frac{y-5}{3-5},$$

$$\frac{x-4}{0} = \frac{y-5}{-2},$$

$$x = 4.$$

5) Найдем точку пересечения высот треугольника. Для этого найдем уравнение еще одной высоты BE, проведенной через вершину B. Так как высота BE перпендикулярна прямой AC, ее уравнение имеет вид:

$$y - y_B = -\frac{1}{k_{AC}}(x - x_B),$$

$$y - 5 = -\frac{3}{4}(x - 7),$$

$$4y - 20 = -3x + 21,$$

$$4y + 3x - 41 = 0.$$

Найдем точку K пересечения высот из системы:

$$\begin{cases} 2y + 3x - 22 = 0, \\ 4y + 3x - 41 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + 3x = 22, \\ 2y = 19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 9,5. \end{cases}$$

Точка $K(1; 9,5)$.

6) Найдем длину высоты CD, опущенной из вершины C. Это расстояние от вершины $C(4;5)$ до прямой AB: $2x+1-3y=0$, поэтому

$$CD=\frac{|2x_C+1-3y_C|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|2\cdot 4+1-3\cdot 5|}{\sqrt{4+9}}=\frac{6}{\sqrt{13}}.$$

7) Запишем систему линейных неравенств, определяющую внутреннюю область треугольника.
Для этого найдем уравнение стороны BC:

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B},$$

$$\frac{x-7}{4-7}=\frac{y-5}{5-5},$$

$$\frac{x-7}{-3}=\frac{y-5}{0},$$

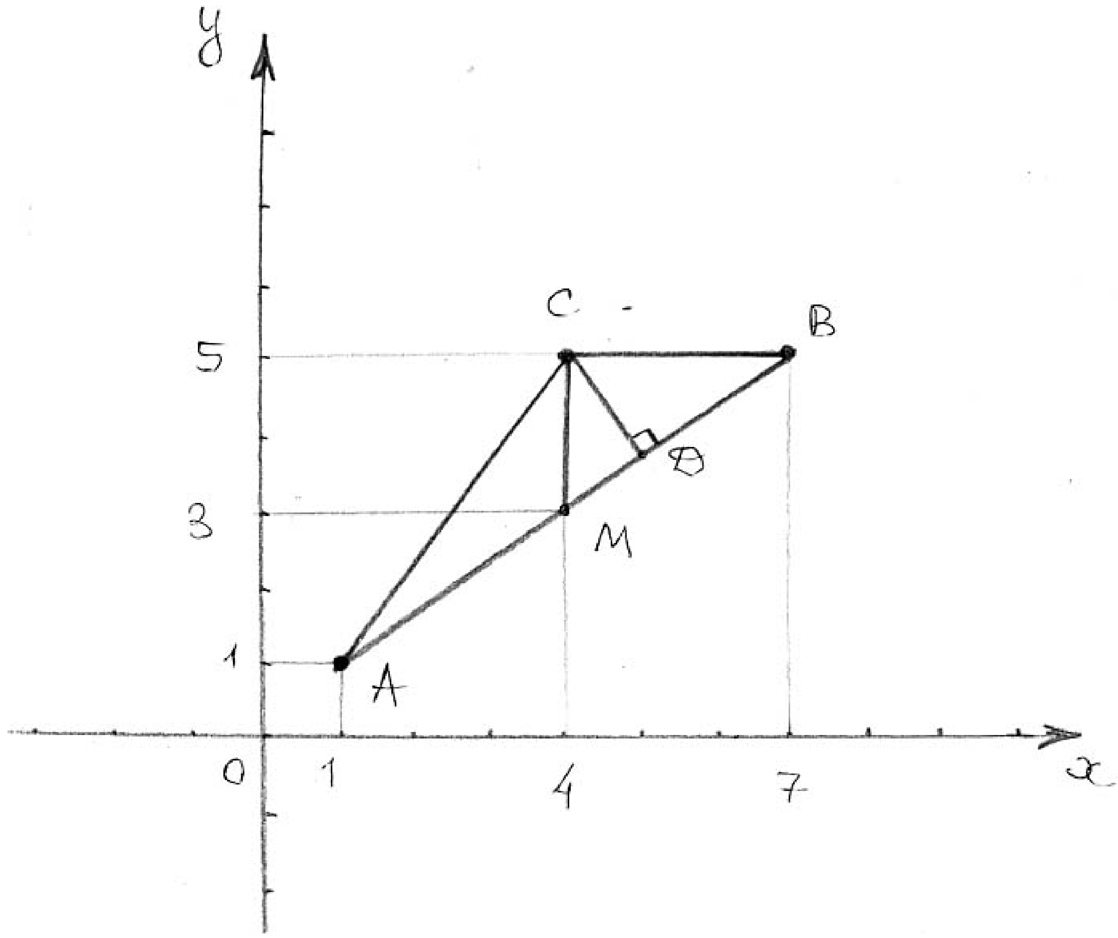
$$y=5.$$

Теперь подставляем в уравнение прямых точки (вершины треугольника), чтобы выделить ту полуплоскость, в которой лежит треугольник:
Сторона AB $2x+1-3y=0$, подставляем точку $C(4;5)$: 8+1-15<0
Сторона BC $y-5=0$, подставляем точку $A(1;1)$: 1-5<0
Сторона AC $3y-4x+1=0$, подставляем точку $B(7;5)$: 15-28+1<0

Получаем систему:

$$\begin{cases} 2x+1-3y<0, \\ y-5<0, \\ 3y-4x+1<0. \end{cases}$$

Сделаем чертеж.


y
x
0
1
4
7
1
3
5
A
B
C
M
D