

### Тема: аналитическая геометрия на плоскости

ЗАДАНИЕ. Даны вершины треугольника  $A(-2, 1)$ ,  $B(3, 3)$ ,  $C(1, 0)$ . Найдите:

- длину стороны  $AB$ ;
- уравнение медианы  $BM$ ;
- $\cos$  угла  $BCA$ ;
- уравнение высоты  $CD$ ;
- длину высоты  $CD$ ;
- площадь треугольника  $ABC$ .

РЕШЕНИЕ.

А) Уравнение стороны  $AB$  :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A},$$
$$\frac{x + 2}{3 + 2} = \frac{y - 1}{3 - 1},$$
$$\frac{x + 2}{5} = \frac{y - 1}{2},$$
$$2x + 4 = 5y - 5,$$
$$2x - 5y + 9 = 0.$$

Б) Найдем середину стороны  $AC$ , точку  $M$  :

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Получаем } M(-0,5; 0,5).$$

Найдем уравнение медианы  $BM$ .

$$\frac{x - x_B}{x_M - x_B} = \frac{y - y_B}{y_M - y_B},$$
$$\frac{x - 3}{-0,5 - 3} = \frac{y - 3}{0,5 - 3},$$
$$\frac{x - 3}{-3,5} = \frac{y - 3}{-2,5},$$
$$\frac{x - 3}{7} = \frac{y - 3}{5},$$
$$5x - 15 = 7y - 21,$$
$$5x - 7y + 6 = 0.$$

в) Найдем  $\cos$  угла  $BCA$ . Для этого найдем координаты векторов:

$$\overline{CB} = \{3 - 1, 3 - 0\} = \{2, 3\},$$

$$\overline{CA} = \{-2 - 1, 1 - 0\} = \{-3, 1\}.$$

$$\text{Тогда } \cos BCA = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CA}}{|\overline{CB}| \cdot |\overline{CA}|} = \frac{2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1}{\sqrt{4 + 9} \sqrt{9 + 1}} = \frac{-3}{\sqrt{13} \sqrt{10}} = \frac{-3}{\sqrt{130}}.$$

г) Найдем уравнение высоты CD. Она перпендикулярна стороне AB с угловым коэффициентом  $k_{AB} = \frac{2}{5}$ , поэтому ее уравнение имеет вид:

$$y - y_C = -\frac{1}{k_{AB}}(x - x_C),$$

$$y - 0 = -\frac{5}{2}(x - 1),$$

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}.$$

д) Найдем длину высоты CD. Длина высоты – это фактически расстояние от точки C(1,0) до прямой AB:  $2x - 5y + 9 = 0$ , то есть

$$CD = \frac{|2x_C - 5y_C + 9|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{11}{\sqrt{29}}.$$

е) Найдем площадь треугольника ABC по формуле  $S = \frac{1}{2}|\Delta|$ , где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 1 - 9 = -11.$$

Таким образом, площадь  $S = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{11}{2} = 5,5$ .