Функциональный анализ

Задание.

Вычислить $\|x\|$ в нормированном пространстве X, если:

А) $x(t)=\sqrt{t},\ x\in C[0,1]$

Б) $x(t)=\sqrt{t},\ x\in L_p[0,1]$

Решение: а) В пространстве $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций норма определяется формулой [1, с.50]:

$$\| x \|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} | x(t) | .$$

Найдем норму функции $x(t)=\sqrt{t}$ в пространстве $C[0,1]$:

$$\| x \|_{C[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} | x(t) |$$

Поскольку на отрезке $[0;1]$ $\sqrt{t} \geq 0$, то

$$\| x \|_{C[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} | x(t) | = \max_{t\in[0,1]} x(t)$$

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $x(t)$ на отрезке [0, 1]. Для этого нам нужно найти значение функции в стационарных точках [] и на концах отрезка, а затем выбрать из них максимальное значение.

Находим производную функции:

$$x'(t) = \left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Поскольку значение производной функции $x(t)$ не равно нулю ни при каких значениях t, то стационарных точек нет. При $t=0$ значение $x'(t)$ не определено. Определим значение функции $x(t)$ на границах промежутка (в точках t = 0, t = 1):

$$x(0) = \sqrt{0} = 0; \; x(1) = \sqrt{1} = 1.$$

Из полученных двух значений выбираем наибольшее. Таким образом,

$$\| x \|_{C[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} x(t) = \max_{t\in[0,1]} \sqrt{t} = \max_{t\in[0,1]}\{0,1\} = 1.$$

б) В пространстве $L_p[0,1]$ норма определяется формулой [1, с.50]:

$$\| x \|_{L_p[0,1]} = \left(\int_0^1 | x(t) |^p dt \right)^{1/p}.$$

Найдем норму функции $x(t) = \sqrt{t}$ в пространстве $L_p[0,1]$:

$$\| x \|_{L_p[0,1]} = \left(\int_0^1 | x(t) |^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 | \sqrt{t} |^p dt \right)^{1/p}.$$

Поскольку на отрезке $[0;1]$ $\sqrt{t} \ge 0$, то

$$\| x \|_{L_p[0,1]} = \left(\int_0^1 | \sqrt{t} |^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 \left(\sqrt{t} \right)^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 (t)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\left. \frac{t^{\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2}+1} \right|_0^1 \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{\frac{p}{2}+1} - \frac{0}{\frac{p}{2}+1} \right)^{1/p} = \left(\frac{2}{p+2} \right)^{1/p}.$$

Ответ: а) 1, б) $\left(\frac{2}{p+2} \right)^{1/p}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ганенкова, Е. Г. Функциональный анализ: основные классы пространств : учебное пособие для студентов математического факультета / Е. Г. Ганенкова, К. Ф. Амозова. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2013. – 52 с.