

Функциональный анализ

Задание. Обосновать дифференцируемость функции $F(y)$ и вычислить ее производную, если $F(y) = \int_{y^4}^1 \frac{e^{-x^2y}}{x} dx$ и $y \neq 0$.

Решение:

Введем обозначения: $f(x, y) = \frac{e^{-x^2y}}{x}$, $\varphi(y) = y^4$, $\psi(y) = 1$. Поскольку $y \neq 0$,

то $y^4 > 0$, значит, функция $f(x, y) = \frac{e^{-x^2y}}{x}$ непрерывна на $[y^4; 1]$. Функция

$$f'_y(x, y) = \frac{-x^2 e^{-x^2y}}{x} = -x e^{-x^2y}$$

тоже непрерывна на $[y^4; 1]$. Функции $\varphi(y) = y^4$, $\psi(y) = 1$ дифференцируемы на $[y^4; 1]$. Значит, можно применить формулу [5]:

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = f(\psi(y), y) \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx.$$

Вычислим вспомогательные выражения:

$$\varphi'(y) = 4y^3, \quad f(\varphi(y), y) = \frac{e^{-y^8y}}{y^4} = \frac{e^{-y^9}}{y^4}, \quad \psi'(y) = 0.$$

Подставим в формулу:

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafa

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$\frac{d}{dy} \int_{y^4}^1 f(x, y) dx = -\frac{e^{-y^9}}{y^4} \cdot 4y^3 + \int_{y^4}^1 -xe^{-x^2y} dx = -\frac{4e^{-y^9}}{y} - \int_{y^4}^1 xe^{-x^2y} dx.$$

Заметим, что $dx^2 = 2xdx$, то есть $xdx = dx^2 / 2$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{y^4}^1 xe^{-x^2y} dx &= \int_{y^4}^1 \frac{e^{-x^2y} dx^2}{2} = \frac{1}{2} \int_{y^4}^1 e^{-x^2y} dx^2 = \frac{1}{2} \int_{y^4}^1 \frac{e^{-x^2y} d(-x^2y)}{-y} = -\frac{1}{2y} \int_{y^4}^1 e^{-x^2y} d(-x^2y) = \\ &= \left(-\frac{1}{2y} e^{-x^2y} \right) \Big|_{y^4}^1 = -\frac{1}{2y} e^{-y} + \frac{1}{2y} e^{-y^6}. \end{aligned}$$

Имеем:

$$F'(y) = -\frac{4e^{-y^9}}{y} - \int_{y^4}^1 xe^{-x^2y} dx = -\frac{4e^{-y^9}}{y} + \frac{1}{2y} e^{-y} - \frac{1}{2y} e^{-y^6} = \frac{e^{-y} - e^{-y^6} + 8e^{-y^9}}{2y}.$$

Ответ: $\frac{e^{-y} - e^{-y^6} + 8e^{-y^9}}{2y}$.