Функциональный анализ

Задание. *Обосновать дифференцируемость функции F(y) и вычислить ее производную, если* $F(y)=\int\limits_{y^4}^{1}\frac{e^{-x^2y}}{x}dx$ *и* $y\neq 0$.

Решение:

Введем обозначения: $f(x,y)=\frac{e^{-x^2y}}{x}$, $\varphi(y)=y^4$, $\psi(y)=1$. Поскольку $y\neq 0$, то $y^4>0$, значит, функция $f(x,y)=\frac{e^{-x^2y}}{x}$ непрерывна на $[y^4;1]$. Функция

$$f'_y(x,y)=\frac{-x^2e^{-x^2y}}{x}=-xe^{-x^2y}$$

тоже непрерывна на $[y^4;1]$. Функции $\varphi(y)=y^4$, $\psi(y)=1$ дифференцируемы на $[y^4;1]$. Значит, можно применить формулу [5]:

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)dx=f(\psi(y),y)\psi'(y)-f(\varphi(y),y)\varphi'(y)+\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f'_y(x,y)dx.$$

Вычислим вспомогательные выражения:

$$\varphi'(y)=4y^3,\ f(\varphi(y),y)=\frac{e^{-y^8y}}{y^4}=\frac{e^{-y^9}}{y^4},\ \psi'(y)=0.$$

Подставим в формулу:

$$\frac{d}{dy}\int_{y^4}^{1} f(x,y)dx = -\frac{e^{-y^9}}{y^4}\cdot 4y^3 + \int_{y^4}^{1} -xe^{-x^2y}dx = -\frac{4e^{-y^9}}{y} - \int_{y^4}^{1} xe^{-x^2y}dx.$$

Заметим, что $dx^2 = 2xdx$, то есть $xdx = dx^2/2$. Имеем:

$$\int_{y^4}^{1} xe^{-x^2y}dx = \int_{y^4}^{1}\frac{e^{-x^2y}dx^2}{2} = \frac{1}{2}\int_{y^4}^{1} e^{-x^2y}dx^2 = \frac{1}{2}\int_{y^4}^{1}\frac{e^{-x^2y}d(-x^2y)}{-y} = -\frac{1}{2y}\int_{y^4}^{1} e^{-x^2y}d(-x^2y) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2y}e^{-x^2y}\right)\Bigg|_{y^4}^{1} = -\frac{1}{2y}e^{-y} + \frac{1}{2y}e^{-y^6}.$$

Имеем:

$$F'(y) = -\frac{4e^{-y^9}}{y} - \int_{y^4}^{1} xe^{-x^2y}dx = -\frac{4e^{-y^9}}{y} + \frac{1}{2y}e^{-y} - \frac{1}{2y}e^{-y^6} = \frac{e^{-y} - e^{-y^6} + 8e^{-y^9}}{2y}.$$

Ответ: $\dfrac{e^{-y} - e^{-y^6} + 8e^{-y^9}}{2y}$.