Ряды Фурье

Функцию $f(x)=1-x/4$ разложить в ряд Фурье четным образом на промежутке [-4;4].
Алгоритм.

1. Определить ортогональную на заданном промежутке систему тригонометрических функций, указать общий период этих тригонометрических функций и вычислить квадраты норм этих функций.
2. Записать общий вид соответствующего тригонометрического ряда Фурье и формулы для вычисления коэффициентов Фурье (в общем виде).
3. Изобразить график суммы ряда Фурье на промежутке [-16;16].
4. Вычислить первые 2 не нулевые коэффициента ряда Фурье, записать соответствующие тригонометрические многочлены и вычислить для них среднее квадратическое отклонение (СКО).
5. Используя теорему Дирихле:

   а) найти сумму ряда Фурье в точке x=140/3

   б) найти сумму одного из числовых рядов записав сумму ряда Фурье в точке x_0=0 или x_0=4

   1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$

   2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$

Решение

Часть 1. Определим ортогональную на заданном промежутке систему тригонометрических функций, укажем общий период этих тригонометрических функций и вычислим квадраты норм этих функций.

Для промежутка $[-4;4]$ длины $T=8$ ортогональная система тригонометрических функций задается следующим образом:

$$F=\left\{1;\ \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right);\ \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right);\ n=1,2,...\right\}=\left\{1;\ \cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right);\ \sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right);\ n=1,2,...\right\}.$$

Общий период $T=8$.

Вычислим квадраты норм этих функций.

$$\|1\|_{[-4;4]}^2=\int_{-4}^{4}1^2\,dx=x\Big|_{-4}^{4}=4+4=8=T,$$

$$\left\|\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right\|^2_{[-4;4]}=\int_{-4}^{4}\cos^2\left(\frac{\pi nx}{4}\right)dx=\int_{0}^{4}\left(1+\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\right)dx=\left.\left(x+\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\right)\right|_0^4=$$

$$=\left(4+\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{4\pi n}{2}\right)\right)=4=T/2.$$

$$\left\|\sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right\|^2_{[-4;4]}=\int_{-4}^{4}\sin^2\left(\frac{\pi nx}{4}\right)dx=\int_{0}^{4}\left(1-\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\right)dx=\left.\left(x-\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right)\right)\right|_0^4=$$

$$=\left(4-\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{4\pi n}{2}\right)\right)=4=T/2.$$

Часть 2. Запишем общий вид соответствующего тригонометрического ряда Фурье и формулы для вычисления коэффициентов Фурье (в общем виде).

Общий вид ряда Фурье:

$$S(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right).$$

Формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье:

$$A_0=\frac{(f(x),1)}{\|1\|^2_{[-4;4]}}=\frac{1}{8}\int_{-4}^{4}f(x)dx,$$

$$A_n=\frac{\left(f(x),\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right)}{\left\|\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right\|^2_{[-4;4]}}=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)dx,\ n=1,2,...$$

$$B_n=\frac{\left(f(x),\sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right)}{\left\|\sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right\|^2_{[-4;4]}}=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right)dx,\ n=1,2,...$$

Если учесть, что функцию $f(x)$ следует разложить четным образом, то формулы с учетом четности преобразуются к следующему виду:

Формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье:

$$A_0=\frac{(f(x),1)}{\|1\|^2_{[-4;4]}}=\frac{1}{8}\int_{-4}^{4}f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{0}^{4}f(x)dx,$$

$$A_n=\frac{\left(f(x),\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right)}{\left\|\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right\|^2_{[-4;4]}}=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{4} f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)dx,\ n=1,2,...$$

$$B_n=\frac{\left(f(x),\sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right)}{\left\|\sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\right\|^2_{[-4;4]}}=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right)dx=0$$ (интеграл от нечетной функции по симметричному интервалу), $n=1,2,...$

Общий вид ряда Фурье: $S(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)$.

Вычислим теперь для заданной функции $f(x)=1-x/4$ коэффициенты.

$$A_0=\frac{1}{4}\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{4}\int_0^4\left(1-\frac{x}{4}\right)dx=\frac{1}{4}\left(x-\frac{x^2}{8}\right)\Bigg|_0^4=\frac{1}{4}\left(4-\frac{16}{8}\right)=\frac{1}{2},$$

$$A_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^4\left(1-\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)dx=\left|\begin{matrix} u=1-x/4 & du=-1/4\,dx \\ dv=\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)dx & v=\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)\frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\Bigg|_0^4+\frac{1}{2\pi n}\int_0^4\sin\left(\frac{\pi nx}{4}\right)dx=-\frac{2}{\pi^2n^2}\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)\Bigg|_0^4=-\frac{2}{\pi^2n^2}(\cos\pi n-\cos 0)=$$

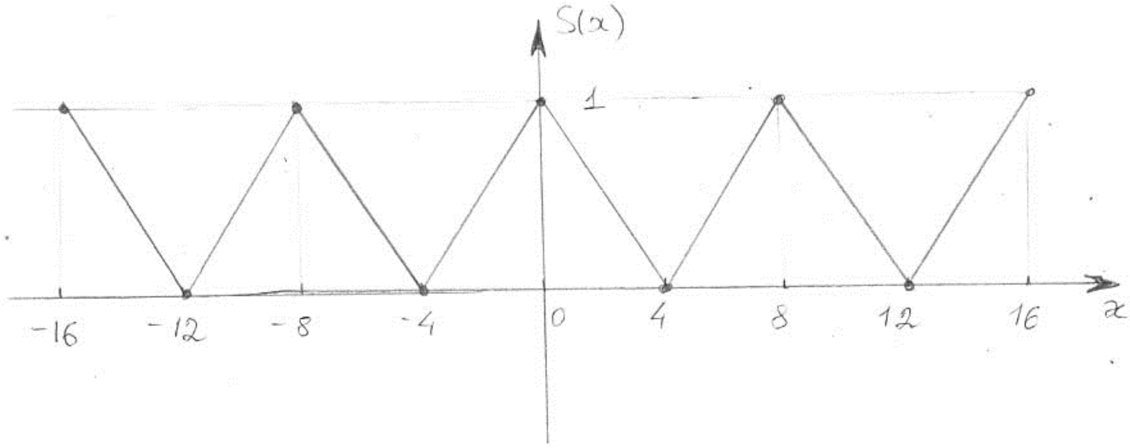
$$=\frac{2}{\pi^2n^2}\left(1-(-1)^n\right).$$

Ряд имеет вид: $S(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos\left(\frac{\pi nx}{4}\right)$.

Часть 3. Изобразим график суммы ряда Фурье на промежутке [-16;16].
Учитываем, что функция отображается четным образом на интервал $[-4;0]$ (симметрично относительно оси Oy к функции на интервале $[0;4]$).

В точках непрерывности $S(x)=f(x)$.

На концах промежутков $S(x)=\frac{1}{2}\left(f(-4+0)+f(4-0)\right)=f(4)=0$.



Часть 4. Вычислим первые 2 не нулевые коэффициента ряда Фурье, запишем соответствующие тригонометрические многочлены и вычислим для них среднее квадратическое отклонение (СКО).

Ряд имеет вид: $S(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{4}\right)$.

Первые ненулевые коэффициенты:

$A_0=\frac{1}{2}$, $A_1=\frac{2}{\pi^2 1^2}\left(1-(-1)^1\right)=\frac{4}{\pi^2}$.

Соответствующие тригонометрические многочлены:

$S_0(x)=\frac{1}{2}$, $S_1(x)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.

Вычислим для них среднее квадратическое отклонение (СКО) по формуле

$$\Delta_n=\sqrt{\left\| f(x)-S_n(x)\right\|^2_{[-4;4]}}=\sqrt{\int_{-4}^{4}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx}.$$

Получаем:

$$\int_{-4}^{4}\left(f(x)-S_0(x)\right)^2 dx=2\int_0^4\left(1-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right)^2 dx=2\int_0^4\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)^2 dx=\frac{1}{8}\int_0^4(2-x)^2 dx=$$

$$=-\frac{1}{24}(2-x)^3\Big|_0^4=-\frac{1}{24}\left((2-4)^3-(2-0)^3\right)=-\frac{1}{24}(-8-8)=\frac{2}{3}$$

СКО: $\Delta_0=\sqrt{\int_{-4}^{4}\left(f(x)-S_0(x)\right)^2 dx}=\sqrt{2/3}$.

Тот же результат можно было получить по общей формуле:

$\Delta_0 = \| f \|^2 - T \cdot A_0^2 = \frac{8}{3} - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}$, здесь норма функции вычислена следующим образом:

$$\| f \|^2 = \int_{-4}^{4} \left(f(x) \right)^2 dx = 2\int_0^4 \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int_0^4 (4-x)^2 dx =$$

$$= -\frac{1}{24}(4-x)^3\Big|_0^4 = -\frac{1}{24}\left((4-4)^3 - (4-0)^3\right) = -\frac{-64}{24} = \frac{8}{3}.$$

Следующее СКО вычислим по рекуррентной формуле: $\Delta_n^2 = \Delta_{n-1}^2 - \frac{T}{2}\left(A_n^2 + B_n^2\right)$.

Получаем:

$$\Delta_1^2 = \Delta_0^2 - \frac{8}{2}\left(A_1^2 + B_1^2\right) = \frac{2}{3} - 4\left(\frac{4}{\pi^2}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{64}{\pi^4}.$$

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{64}{\pi^4}}.$$

<u>Часть 5.</u> Используя теорему Дирихле:

а) Найдем сумму ряда Фурье в точке $x = \frac{140}{3} = 46\frac{2}{3} = 48 - 1\frac{1}{3} = 6T - \frac{4}{3}$. Точка лежит в интервале непрерывности функции, значит, получаем:

$$S\left(\frac{140}{3}\right) = S\left(6T - \frac{4}{3}\right) = S\left(-\frac{4}{3}\right) = f\left(-\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = 1 - \frac{4/3}{4} = \frac{2}{3}.$$

б) Найдем сумму одного из числовых рядов, записав сумму ряда Фурье в точке $x_0=0$ или $x_0=4$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$

Заметим, что при четных значениях $n = 2k$ коэффициенты ряда обнуляются, поэтому ряд можно записать в следующем виде:

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(1 - (-1)^n\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{4}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2}\cos\left(\frac{\pi x (2k-1)}{4}\right).$$

Полагая $x = 0$, получим:

$$S(0) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = f(0) = 1.$$

Отсюда можно выразить:

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1,$$

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$