

Тема: Дифференциальные уравнения

ЗАДАНИЕ. Решить уравнение $y' = -y/x$ ($x \neq 0$).

РЕШЕНИЕ. Уравнение разрешено относительно производной. Заменяем y' на dy/dx , умножаем обе части уравнения на dx и делим на y . Получаем

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C, \quad \ln |y| + \ln |x| = C. \quad (1)$$

Постоянную C можно записать в виде $C = \ln |\tilde{C}|$ ($\tilde{C} \neq 0$) (так как любое положительное или отрицательное число C может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|\tilde{C}|$). Подставляя это выражение в (1), получим

$$\ln |xy| = \ln |\tilde{C}|, \quad (\tilde{C} \neq 0).$$

Потенцируя последнее равенство, находим общий интеграл $xy = \tilde{C}$ (семейство гипербол). При делении на y мы могли потерять решение $y = 0$. Подставляя $y = 0$ в исходное уравнение, видим, что это решение и оно может быть получено из общего интеграла при $\tilde{C} = 0$. Таким образом, общий интеграл дается формулой

$$xy = \tilde{C},$$

где \tilde{C} может принимать любые значения (в том числе $\tilde{C} = 0$).