Тема: Дифференциальные уравнения

Задание. *Показать, что функция $y^2 - x^2 - Cy = 0$ является общим интегралом дифференциального уравнения $y'(x^2 + y^2) - 2xy = 0$.*

Решение. Дифференцируем по x данную неявную функцию, получаем

$$2yy' - 2x - Cy' = 0, \quad y'(2y - C) = 2x, \quad y' = \frac{2x}{2y - C}.$$

Из уравнения $y^2 - x^2 - Cy = 0$ находим $C = (y^2 - x^2)/y$ и подставляем его выражение в формулу для производной y':

$$y' = \frac{2x}{2y - \frac{y^2 - x^2}{y}}, \quad y' = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Подставляем производную в дифференциальное уравнение и приходим к тождеству:

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2) - 2xy \equiv 0.$$

Таким образом, неявная функция $y^2 - x^2 - Cy = 0$, зависящая от одной произвольной постоянной, является общим интегралом этого дифференциального уравнения.