

Тема. Дифференциальные уравнения. Задача Коши

ЗАДАНИЕ. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' = \frac{2y - x}{2x + y}, y(1) = 1$$

РЕШЕНИЕ. Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{x}$:

$$y' = \frac{\frac{1}{x}(2y - x)}{\frac{1}{x}(2x + y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\frac{y}{x} - 1}{2 + \frac{y}{x}}$$

Мы получили однородное дифференциальное уравнение первого порядка, то есть, уравнение вида $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$. Для его решения введем новую переменную $y = tx$. Тогда

$$y' = (tx)' = t'x + x't = t'x + t$$

Подставим эти значения в наше уравнение:

$$\frac{dt}{dx}x + t = \frac{2t - 1}{2 + t}$$

$$\frac{dt}{dx}x = \frac{2t - 1}{2 + t} - \frac{2t + t^2}{2 + t}$$

$$\frac{dt}{dx}x = \frac{2t - 1 - 2t - t^2}{2 + t}$$

$$\frac{dt}{dx}x = -\frac{t^2 + 1}{2 + t}$$

$$dt = -\frac{t^2 + 1}{2 + t} \frac{dx}{x}$$

$$\frac{(2 + t)dt}{t^2 + 1} = -\frac{dx}{x}$$

Мы успешно разделили переменные. Теперь можно проинтегрировать обе части.

$$\int \frac{(2 + t)dt}{t^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x}$$

Найдем первый интеграл $\int \frac{(2+t)dt}{t^2+1}$ отдельно. Его можно разбить на два интеграла:

$$\int \frac{(2+t)dt}{t^2+1} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} + \int \frac{tdt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg}(t) + \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg}(t) + \frac{1}{2} \ln(t^2+1) - C$$

То есть, мы получаем, что

$$2\operatorname{arctg}(t) + \frac{1}{2} \ln(t^2+1) - C = -\ln x$$

$$-\ln x + C = 2\operatorname{arctg}(t) + \frac{1}{2} \ln(t^2+1)$$

Вернемся к переменной y по формуле $t = \frac{y}{x}$. Получим:

$$C - \ln x = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)$$

Определим константу C , исходя из начального условия $y(1) = 1$. Подставим эти данные в решение:

$$C - \ln 1 = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{1} + 1\right)$$

$$C = 2\operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{2} \ln 2$$

$$C = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\pi + \ln 2}{2}$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид:

$$\frac{\pi + \ln 2}{2} - \ln x = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)$$

$$4\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + 2\ln x = \pi + \ln 2$$