Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом вариации

Задание. *Найти решение задачи Коши:*

$y''-3y'=\dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$, $y(0)=4\ln 4, y'(0)=3(3\ln 4-1)$.

Решение.

Решим сначала однородное уравнение

$y''-3y'=0$.

Составим характеристическое уравнение

$\lambda^2-3\lambda=0,$

$\lambda(\lambda-3)=0,$

$\lambda_1=0;\lambda_2=3$

Решение будет иметь вид $y=C_1e^{3x}+C_2$.

Пусть $C_1=C_1(x);C_2=C_2(x)$, тогда для нахождения частного решения необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{3x}+C_2'(x)=0 \\ C_1'(x)\left(e^{3x}\right)'+C_2'(x)(1)'=\dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)=-e^{-3x}C_2'(x) \\ -e^{-3x}C_2'(x)3e^{3x}=\dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)=e^{-3x}\dfrac{3e^{-3x}}{3+e^{-3x}} \\ C_2'(x)=-\dfrac{3e^{-3x}}{3+e^{-3x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(x)=\displaystyle\int\frac{3e^{-6x}}{3+e^{-3x}}dx \\ C_2(x)=-\displaystyle\int\frac{3e^{-3x}}{3+e^{-3x}}dx \end{cases}$$

Вычислим оба интеграла

$$C_1(x)=\int\frac{3e^{-6x}}{3+e^{-3x}}dx=\left|\begin{matrix}u=e^{-3x} & x=-\frac{1}{3}\ln u\\ dx=-\frac{1}{3}\frac{du}{u} & \end{matrix}\right|=\int\frac{3u^2}{3+u}\left(-\frac{1}{3}\frac{du}{u}\right)=-\int\frac{udu}{3+u}=$$

$$=-\int\frac{3+u-3}{3+u}du=-\int\left(1-\frac{3}{3+u}\right)du=-u+3\ln|u+3|+A_1=-e^{-3x}+3\ln|e^{-3x}+3|+A_1.$$

$$C_2(x)=-\int\frac{3e^{-3x}}{3+e^{-3x}}dx=\left|\begin{matrix}u=e^{-3x} & x=-\frac{1}{3}\ln u\\ dx=-\frac{1}{3}\frac{du}{u} & \end{matrix}\right|=-\int\frac{3u}{3+u}\left(-\frac{1}{3}\frac{du}{u}\right)=\int\frac{du}{3+u}=$$

$$=\ln|u+3|+A_2=\ln|e^{-3x}+3|+A_2.$$

Значит, общее решение имеет вид:

$$y=C_1(x)e^{3x}+C_2(x)=$$

$$=\left(-e^{-3x}+3\ln|e^{-3x}+3|+A_1\right)e^{3x}+\ln|e^{-3x}+3|+A_2=$$

$$=-1+3e^{3x}\ln|e^{-3x}+3|+\ln|e^{-3x}+3|+A_1e^{3x}+A_2.$$

Найдем частное решение из начальных условий $y(0)=4\ln 4, y'(0)=3(3\ln 4-1)$.

Найдем производную:

$$y'=C_1'(x)e^{3x}+3C_1(x)e^{3x}+C_2'(x)=\frac{3e^{-6x}}{3+e^{-3x}}e^{3x}+3e^{3x}\left(-e^{-3x}+3\ln|e^{-3x}+3|+A_1\right)-\frac{3e^{-3x}}{3+e^{-3x}}.$$

Подставляем $x=0$ в y и y':

$$\begin{cases}y(0)=-1+3\ln|1+3|+\ln|1+3|+A_1+A_2=4\ln 4;\\ y'(0)=\frac{3}{3+1}+3\left(-1+3\ln|1+3|+A_1\right)-\frac{3}{3+1}=3(3\ln 4-1).\end{cases}$$

$$\begin{cases}-1+4\ln 4+A_1+A_2=4\ln 4;\\ (-1+3\ln 4+A_1)=(3\ln 4-1).\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_2=1;\\ A_1=0.\end{cases}$$

Искомое частное решение:

$$y(x)=3e^{3x}\ln|e^{-3x}+3|+\ln|e^{-3x}+3|.$$

Ответ. $y(x)=3e^{3x}\ln|e^{-3x}+3|+\ln|e^{-3x}+3|$..