

Тема: Динамическое программирование

ЗАДАНИЕ. Планируется распределение начальной суммы X_0 млн. р. Между четырьмя предприятиями некоторого объединения. Средства выделяются только в размерах кратных $a = 80$ млн. р. Функции прироста продукции от вложенных средств на каждом предприятии заданы таблично. Требуется так распределить вложения между предприятиями, чтобы общий прирост продукции (в млн. р.) был максимальным. Решить задачу на основе функционального уравнения Беллмана.

Таблица 1.

X_0	Вкладываемые средства X	Функции прироста продукции на предприятии			
		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
400	0	10	15	13	14
	80	13	20	17	16
	160	16	22	21	23
	240	21	25	26	25
	320	25	30	28	27
	400	25	32	30	32

РЕШЕНИЕ. Функциональное уравнение Беллмана для нашей задачи имеет вид:

$$F_n(x_0) = \max_{0 \leq x \leq x_0} (f_n(x) + F_{n-1}(x_0 - x)), n = \overline{1,4}, \text{ где } F_1(x) = f_1(x).$$

Первый шаг. Вычислим значения $F_2(x_0)$ по формуле

$$F_2(x_0) = \max_{0 \leq x \leq x_0} (f_2(x) + F_1(x_0 - x)), \text{ т.е. решим задачу для двух предприятий. Занесем все}$$

результаты в таблицу, где через x_2 и $x_1 = x_0 - x_2$ обозначены количества средств, вложенных соответственно во второе и первое предприятия.

Таблица 2.

x_2	f_2	x_1	0	80	160	240	320	400	F_2	План
		F_1	10	13	16	21	25	25		
0	15	25	28	31	36	40	40	25	(0,0)	
80	20	30	33	36	41	45		30	(0,80)	
160	22	32	35	38	43			33	(80,80)	
240	25	35	38	41				36	(160,80) (240,0)	
320	30	40	43					41	(240,80)	
400	32	42						45	(320,80)	

Второй шаг. Распределим вложения между тремя предприятиями. Будем использовать формулу

$$F_3(x_0) = \max_{0 \leq x \leq x_0} (f_3(x) + F_2(x_0 - x)), \text{ при этом значения } F_2 \text{ будем брать из таблицы 2, а}$$

значения f_3 - из таблицы 1. Результаты занесем в таблицу 3, где $x_0 - x_3 = x_1 + x_2$.

Затем аналогично вычислим $F_4(x_0)$ (Таблица 4).

Таблица 3.

x_3	f_3	x_1+x_2	0	80	160	240	320	400	F_3	План
		F_2	25	30	33	36	41	45		
0		13	38	43	46	49	54	58	38	(0,0,0)
80		17	42	47	50	53	58		43	(0,80,0)
160		21	46	51	54	57			47	(0,80,80)
240		26	51	56	59				51	(0,0,240) (0,80,160)
320		28	53	58					56	(0,80,240)
400		30	55						59	(80,80,240)

Таблица 4.

x_4	f_4	x_0-x_4	0	80	160	240	320	400	F_4	План
		F_3	38	43	47	51	56	59		
0		14	52	57	61	65	70	73	52	(0,0,0,0)
80		16	54	59	63	67	72		57	(0,80,0,0)
160		23	61	66	70	74			61	(0,80,80,0) (0,0,0,160)
240		25	63	68	72				66	(0,80,0,160)
320		27	65	70					70	(0,80,240,0) (0,80,80,160)
400		32	70						74	(0,0,240,160) (0,80,160,160)

Таким образом, оптимальная программа распределения средств между четырьмя предприятиями представлена в последнем столбце таблицы 4. Наибольший прирост при вложении 400 тыс. рублей составит 74 тыс.р., при этом возможно два варианта инвестирования:

1. Вложить в третье предприятие 240 и в четвертое – 160 тыс.р.
2. Вложить во второе предприятие 80, в третье и четвертое – по 160 тыс. р.