Задача с решением по численным методам
Тема: решение нелинейных уравнений

ЗАДАНИЕ.

Методом бисекции найти решение нелинейного уравнения на отрезке $[a,b]$ *с точностью* $\varepsilon = 10^{-2}$. *Выбрав полученное решение в качестве начального приближения, найти решение уравнения методом простой итерации с точностью* $\varepsilon = 10^{-4}$. *Для метода простой итерации обосновать сходимость и оценить достаточное для достижения заданной точности число итераций.*

№	Уравнение	$[a,b]$
11	$e^x = 1/\sqrt{x}$	[0.3,0.8]

РЕШЕНИЕ.

Опишем идею метода бисекции.

Найдем середину отрезка $[a,b]$: $c = \frac{a+b}{2}$. Корень остался на одной из частей: $[a,c]$ или $[c,b]$. Если $f(a) \cdot f(c) < 0$, то корень попал на отрезок $[a,c]$, тогда деление отрезка можно повторить, приняв в качестве нового правого конца точку c (то есть на следующей итерации положить $b = c$). В противном случае корень попал на половину $[c,b]$, и необходимо изменить значение левого конца отрезка, при следующей итерации положив $a = c$. Поскольку корень всегда заключен внутри отрезка, итерационный процесс можно останавливать, если длина отрезка станет меньше заданной точности: $|b - a| < \varepsilon$.

Проделаем первый шаг описанного алгоритма:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0; \quad a = 0.3; b = 0.8$$

$$c = \frac{0.3 + 0.8}{2} = 0.55$$

$$f(a) = e^{0.3} - \frac{1}{\sqrt{0.3}} \approx -0.47588;$$

$$f(c) = e^{0.55} - \frac{1}{\sqrt{0.55}} \approx 0.38485;$$

$$f(b) = e^{0.8} - \frac{1}{\sqrt{0.8}} \approx 1.10751$$

$f(a) \cdot f(c) < 0$, таким образом, корень попадает в отрезок $[a;c] = [0.3;0.55]$, и в следующей итерации нужно положить $b = c = 0.55$.

Остальные расчеты представим в таблице:

a_i	$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$	b_i	$f(a_i)$	$f(c_i)$	$f(b_i)$	$\lvert b_i - a_i \rvert$
0,3	0,55	0,8	-0,47588	0,38485	1,10751	0,5
0,3	0,425	0,55	-0,47588	-0,00434	0,38485	0,25
0,425	0,4875	0,55	-0,00434	0,19601	0,38485	0,125

0,425	0,45625	0,4875	-0,00434	0,09768	0,19601	0,0625
0,425	0,44063	0,45625	-0,00434	0,04719	0,09768	0,03125
0,425	0,43281	0,44063	-0,00434	0,02156	0,04719	0,01563
0,425	0,42891	0,43281	-0,00434	0,00865	0,02156	0,00781

Как видно из таблицы, после седьмой итерации становится известно, что корень заданного уравнения принадлежит отрезку $[0.425; 0.43281]$, длина которого 0.00781, что меньше $\varepsilon = 0.01$. Таким образом, с заданной точностью в качестве искомого корня можно принять середину найденного отрезка:

$$x_0 \approx 0.42891$$

Опишем метод простой итерации.

Запишем уравнение $f(x) = 0$ в виде $x = \varphi(x)$. Пусть имеется начальное приближение к корню $x = x_0$. Подставим его в правую часть уравнения $x = \varphi(x)$ и получим новое приближение $x_1 = \varphi(x_0)$, затем аналогичным образом получим $x_2 = \varphi(x_1)$. и т.д.,

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

Считаем, что корень найден, если $|x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon$, где ε - заданная погрешность.

Необходимо установить, при каких условиях описанный итерационный процесс будет сходиться к корню уравнения x^*. Пусть в итерационной формуле $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

$$x_k = x^* + \varepsilon_k; x_{k+1} = x^* + \varepsilon_{k+1}$$

где ε – отклонения k-го и $k+1$-го приближений от корня.

Если процесс уточнения осуществляется вблизи корня x^*, то функцию $\varphi(x)$ можно приближенно представить двумя членами ряда Тейлора . Тогда формула $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ примет вид:

$$x^* + \varepsilon_{k+1} \cong \varphi(x^*) + \varepsilon_k \varphi'(x^*)$$

Так как x^* - корень уравнения, то $x^* = \varphi(x^*)$ и, следовательно,

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \varphi'(x^*)$$

Для того , чтобы итерационный процесс был сходящимся, необходимо выполнение условия $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$, что возможно лишь когда $|\varphi'(x)| < 1$.

Преобразуем заданное уравнение:

$$e^x = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

$$x = e^{-2x}$$

Итак, $\varphi(x) = e^{-2x}$; $\varphi'(x) = -2e^{-2x}$

С помощью метода бисекции ранее было определено, что начальное приближение $x_0 = 0.42891$ принадлежит отрезку $[0.425; 0.43281]$.

$$0.425 < x < 0.43281$$

$$-2 \cdot 0.43281 < -2x < -2 \cdot 0.425$$

Так как функция $-2e^{-2x}$ монотонно возрастает, то

$$e^{-2 \cdot 0.43281} < e^{-2x} < e^{-2 \cdot 0.425}$$

$$-2e^{-2\cdot 0.425} < -2e^{-2x} < -2e^{-2\cdot 0.43281}$$
$$-0.85483 < -2e^{-2x} < -0.84158$$

Таким образом,

$$|\varphi'(x)| = |-2e^{-2x}| < 0.85483 < 1$$

Это означает, что итерационный процесс $x_{k+1} = e^{-2x_k}$ сходится к корню x^*.
Так как $|\varphi'(x)| < 0.85483$, можно сказать, что итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = 0.85483$. Исходя из этого, оценим количество итераций, требующихся для достижения заданной точности. Найдем, начиная с какого значения n будет выполняться:

$$|b_{n+1} - b_n| = |x_0 \cdot q^{n+1} - x_0 \cdot q^n| < \varepsilon$$
$$|x_0 \cdot q^n (q-1)| < \varepsilon$$
$$q^n < \frac{\varepsilon}{x_0(1-q)}$$
$$n > \log_q \frac{\varepsilon}{x_0(1-q)} = \log_{0.85483} \frac{10^{-4}}{0.42891(1-0.85483)} \approx 41$$

Следует заметить, что эта оценка как правило завышена и на практике используется редко.
Проведем вычисления, на каждой итерации вычисляя $|x_{k+1} - x_k|$

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k\rvert$	
0	0,42891	0,424089		
1	0,424089	0,428195	0,0041058	$> \varepsilon$
2	0,428195	0,424693	0,0035018	$> \varepsilon$
3	0,424693	0,427678	0,0029848	$> \varepsilon$
4	0,427678	0,425132	0,0025455	$> \varepsilon$
5	0,425132	0,427302	0,0021698	$> \varepsilon$
6	0,427302	0,425452	0,0018503	$> \varepsilon$
7	0,425452	0,427029	0,0015774	$> \varepsilon$
8	0,427029	0,425684	0,0013450	$> \varepsilon$
9	0,425684	0,426831	0,0011467	$> \varepsilon$
10	0,426831	0,425853	0,0009777	$> \varepsilon$
11	0,425853	0,426686	0,0008336	$> \varepsilon$
12	0,426686	0,425976	0,0007108	$> \varepsilon$
13	0,425976	0,426582	0,0006060	$> \varepsilon$
14	0,426582	0,426065	0,0005167	$> \varepsilon$
15	0,426065	0,426506	0,0004405	$> \varepsilon$
16	0,426506	0,42613	0,0003756	$> \varepsilon$
17	0,42613	0,42645	0,0003202	$> \varepsilon$
18	0,42645	0,426177	0,0002730	$> \varepsilon$
19	0,426177	0,42641	0,0002328	$> \varepsilon$
20	0,42641	0,426211	0,0001985	$> \varepsilon$
21	0,426211	0,426381	0,0001692	$> \varepsilon$
22	0,426381	0,426236	0,0001443	$> \varepsilon$
23	0,426236	0,426359	0,0001230	$> \varepsilon$
24	0,426359	0,426254	0,0001049	$> \varepsilon$
25	0,426254	0,426344	0,0000894	$< \varepsilon$

Итак, после 25 итераций получили 0.426344
С точностью до 10^{-4}, искомый корень: $x = 0.42634$. Видно, что в действительности потребовалось существенно меньше итераций, чем в априорной оценке.

Ответ. а) начальное приближение $x_0 = 0.42891$ принадлежит отрезку $[0.425; 0.43281]$;
б) $x = 0.42634$