

Задача с решением по численным методам

Тема: приближенное вычисление интеграла методом прямоугольников

ЗАДАНИЕ.

Методом прямоугольников вычислить интеграл с шагом 0,02:

$$\int_{0,4}^{2,2} \frac{\sin(x^2 + 2.5) dx}{(x^3 + 3)}$$

РЕШЕНИЕ.

Используем для вычисления интеграла формулу средних прямоугольников. Для этого разобьем отрезок интегрирования $[0.4, 2.2]$ на равные части с шагом $h=0.02$.

Вычислим значения подынтегральной функции $y_i = \frac{\sin(x_i^2 + 2.5)}{(x_i^3 + 3)}$ в полуцелых точках

разбиения $x_{i-1/2} = x_{i-1} + h/2$.

| x_i | $x_{i-1/2}$ | $y_{i-1/2}$ |
|-------|-------------|-------------|
| 0,4 | | |
| 0,42 | 0,41 | 0,1486 |
| 0,44 | 0,43 | 0,1432 |
| 0,46 | 0,45 | 0,1375 |
| 0,48 | 0,47 | 0,1316 |
| 0,5 | 0,49 | 0,1253 |
| 0,52 | 0,51 | 0,1188 |
| 0,54 | 0,53 | 0,1121 |
| 0,56 | 0,55 | 0,1051 |
| 0,58 | 0,57 | 0,0978 |
| 0,6 | 0,59 | 0,0903 |
| 0,62 | 0,61 | 0,0825 |
| 0,64 | 0,63 | 0,0745 |
| 0,66 | 0,65 | 0,0664 |
| 0,68 | 0,67 | 0,0580 |
| 0,7 | 0,69 | 0,0495 |
| 0,72 | 0,71 | 0,0408 |
| 0,74 | 0,73 | 0,0320 |
| 0,76 | 0,75 | 0,0231 |
| 0,78 | 0,77 | 0,0141 |
| 0,8 | 0,79 | 0,0050 |
| 0,82 | 0,81 | -0,0041 |
| 0,84 | 0,83 | -0,0132 |
| 0,86 | 0,85 | -0,0224 |
| 0,88 | 0,87 | -0,0314 |
| 0,9 | 0,89 | -0,0405 |

| | | |
|------|------|---------|
| 0,92 | 0,91 | -0,0494 |
| 0,94 | 0,93 | -0,0582 |
| 0,96 | 0,95 | -0,0669 |
| 0,98 | 0,97 | -0,0754 |
| 1 | 0,99 | -0,0836 |
| 1,02 | 1,01 | -0,0917 |
| 1,04 | 1,03 | -0,0995 |
| 1,06 | 1,05 | -0,1070 |
| 1,08 | 1,07 | -0,1142 |
| 1,1 | 1,09 | -0,1210 |
| 1,12 | 1,11 | -0,1275 |
| 1,14 | 1,13 | -0,1336 |
| 1,16 | 1,15 | -0,1392 |
| 1,18 | 1,17 | -0,1445 |
| 1,2 | 1,19 | -0,1493 |
| 1,22 | 1,21 | -0,1536 |
| 1,24 | 1,23 | -0,1574 |
| 1,26 | 1,25 | -0,1607 |
| 1,28 | 1,27 | -0,1635 |
| 1,3 | 1,29 | -0,1658 |
| 1,32 | 1,31 | -0,1676 |
| 1,34 | 1,33 | -0,1688 |
| 1,36 | 1,35 | -0,1694 |
| 1,38 | 1,37 | -0,1695 |
| 1,4 | 1,39 | -0,1690 |
| 1,42 | 1,41 | -0,1680 |
| 1,44 | 1,43 | -0,1664 |
| 1,46 | 1,45 | -0,1643 |
| 1,48 | 1,47 | -0,1617 |
| 1,5 | 1,49 | -0,1585 |
| 1,52 | 1,51 | -0,1549 |
| 1,54 | 1,53 | -0,1507 |
| 1,56 | 1,55 | -0,1460 |
| 1,58 | 1,57 | -0,1409 |
| 1,6 | 1,59 | -0,1354 |
| 1,62 | 1,61 | -0,1295 |
| 1,64 | 1,63 | -0,1232 |
| 1,66 | 1,65 | -0,1165 |
| 1,68 | 1,67 | -0,1095 |
| 1,7 | 1,69 | -0,1022 |
| 1,72 | 1,71 | -0,0947 |
| 1,74 | 1,73 | -0,0869 |
| 1,76 | 1,75 | -0,0789 |
| 1,78 | 1,77 | -0,0708 |
| 1,8 | 1,79 | -0,0626 |

| | | |
|--------------|------|----------------|
| 1,82 | 1,81 | -0,0544 |
| 1,84 | 1,83 | -0,0461 |
| 1,86 | 1,85 | -0,0378 |
| 1,88 | 1,87 | -0,0296 |
| 1,9 | 1,89 | -0,0215 |
| 1,92 | 1,91 | -0,0135 |
| 1,94 | 1,93 | -0,0057 |
| 1,96 | 1,95 | 0,0019 |
| 1,98 | 1,97 | 0,0092 |
| 2 | 1,99 | 0,0162 |
| 2,02 | 2,01 | 0,0228 |
| 2,04 | 2,03 | 0,0292 |
| 2,06 | 2,05 | 0,0351 |
| 2,08 | 2,07 | 0,0405 |
| 2,1 | 2,09 | 0,0455 |
| 2,12 | 2,11 | 0,0500 |
| 2,14 | 2,13 | 0,0540 |
| 2,16 | 2,15 | 0,0575 |
| 2,18 | 2,17 | 0,0605 |
| 2,2 | 2,19 | 0,0628 |
| Сумма | | -3,9067 |

По формуле прямоугольников получим:

$$I_1 = h \sum_i y_{i-1/2} = 0.02 \cdot (-3.9067) = -0.0781.$$

Ответ: $\int_{0.4}^{2.2} \frac{\sin(x^2 + 2.5) dx}{(x^3 + 3)} \approx -0.0781.$