

## МИРЭА

### Математический анализ

#### Типовой расчет по теме «Предел и производная»

#### Вариант 8

**Задача 1.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 3x^2} + 7}{3x - 6}$$

**Решение.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 3x^2} + 7}{3x - 6} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt[3]{8 + 3/x} + 7/x)}{x(3 - 6/x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{8 + 3/x} + 7/x)}{(3 - 6/x)} = \frac{(\sqrt[3]{8 + 0} + 0)}{(3 - 0)} = \frac{2}{3}.$$

**Задача 2.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , используя второй замечательный предел  $f(x) = (1 + 3 \sin x)^{2 \operatorname{ctg} 3x}$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \sin x)^{2 \operatorname{ctg} 3x} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1 + 3 \sin x)^{\frac{1}{3 \sin x}} \right)^{2 \operatorname{ctg} 3x \cdot 3 \sin x} = \left| \text{м.к. } (1 + t)^{1/t} \rightarrow e, t \rightarrow 0 \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{2 \operatorname{ctg} 3x \cdot 3 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{6 \cos 3x \cdot \sin x}{\sin 3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{6 \cos 3x \cdot \frac{3x \cdot \sin x \cdot x}{\sin 3x \cdot x \cdot 3x}} = \left| \text{м.к. } \frac{\sin t}{t} \rightarrow 1, t \rightarrow 0 \right| = \lim_{x \rightarrow 0} e^{6 \cos 3x \cdot \frac{1}{3}} = e^2. \end{aligned}$$

**Задача 3.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  с помощью замены бесконечно малых на эквивалентные.

Типовой расчет выполнен на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=tr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=tr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$f(x) = \frac{(1 - \cos 2x)^2}{\operatorname{tg}^2 2x - \sin^2 2x}$$

**Решение.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)^2}{\operatorname{tg}^2 2x - \sin^2 2x} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

Если сразу применить эквивалентности  $\operatorname{tg} x \sim x$ ,  $\sin x \sim x$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$  при  $x \rightarrow 0$ , то все

равно получится неопределенность вида  $\left( \frac{0}{0} \right)$ , поэтому сначала упростим предел

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)^2}{\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} - \sin^2 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)^2 \cos^2 2x}{\sin^2 2x (1 - \cos^2 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)^2 \cos^2 2x}{\sin^4 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{1}{2}(2x)^2 \right]^2 \cos^2 2x}{(2x)^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Задача 4.** Найти точки разрыва функции. Определить характер разрывов.

$$y = \frac{\sqrt{a+bx-c}}{x^2-k^2}, \quad a=5, b=1, c=2, k=1.$$

**Решение.** Запишем функцию:

$$y = \frac{\sqrt{5+x}-2}{x^2-1^2} = \frac{\sqrt{5+x}-2}{(x-1)(x+1)}.$$

Типовой расчет выполнен на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=tr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=tr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Получаем две точки, подозрительные на разрыв:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ .

Исследуем непрерывность в этих точках.

Пусть  $x_1 = 1$ . Вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{\sqrt{5+x}-2}{(x-1)(x+1)} = \left( \frac{\sqrt{6}-2}{\pm 0} \right) = \pm \infty.$$

Пределы слева и справа бесконечны, поэтому в точке  $x_1 = 1$  функция терпит разрыв второго рода.

Пусть  $x_2 = -1$ . Вычислим предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} \frac{\sqrt{5+x}-2}{(x-1)(x+1)} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} \frac{(\sqrt{5+x}-2)(\sqrt{5+x}+2)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{5+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} \frac{(5+x-4)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{5+x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} \frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{5+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{5+x}+2)} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Пределы слева и справа конечны и равны, поэтому в точке  $x_2 = -1$  функция непрерывна.

**Задача 5.** Найти производную функции  $f(x)$

Типовой расчет выполнен на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=tr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=tr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$f(x) = \sqrt[7]{1-3x} - \frac{1}{1+\cos x} + \left(\frac{1}{x}\right)^x.$$

**Решение.**

$$f(x) = \sqrt[7]{1-3x} - \frac{1}{1+\cos x} + \left(\frac{1}{x}\right)^x = (1-3x)^{1/7} - (1+\cos x)^{-1} + e^{x \ln(1/x)}$$

Тогда производная:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{7}(1-3x)^{1/7-1} \cdot (1-3x)' - (-1)(1+\cos x)^{-1-1} \cdot (1+\cos x)' + e^{x \ln(1/x)} (x \ln(1/x))' = \\ &= -\frac{3}{7}(1-3x)^{-6/7} + (1+\cos x)^{-2} \cdot (-\sin x) + \left(\frac{1}{x}\right)^x \left( \ln(1/x) + x \cdot x \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right) = \\ &= -\frac{3}{7(1-3x)^{6/7}} + \frac{-\sin x}{(1+\cos x)^2} + \left(\frac{1}{x}\right)^x \left( \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right). \end{aligned}$$

**Задача 6.** Найти производную  $\frac{dy}{dx}$  функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = x(t) = t^2 + \cos(t+2), \\ y = y(t) = e^t \sin 2t. \end{cases}$$

**Решение.**

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t \sin 2t + e^t 2 \cos 2t}{2t - \sin(t+2)} = \frac{e^t (\sin 2t + 2 \cos 2t)}{2t - \sin(t+2)}.$$

Типовой расчет выполнен на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=tr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=tr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

**Задача 7.** Найти производную  $\frac{dy}{dx}$  неявной функции, заданной уравнением  $f(x, y) = 0$ .

$$f(x, y) = \ln(x - 2y) + x^2 y.$$

**Решение.** Дифференцируем обе части соотношения  $\ln(x - 2y) + x^2 y = 0$  и выражаем  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

$$(\ln(x - 2y) + x^2 y)' = 0,$$

$$\frac{1 - 2y'}{x - 2y} + 2xy + x^2 y' = 0,$$

$$y' \left( \frac{-2}{x - 2y} + x^2 \right) = -2xy - \frac{1}{x - 2y},$$

$$y' \left( \frac{-2 + x^3 - 2x^2 y}{x - 2y} \right) = \frac{-2x^2 y + 4xy^2 - 1}{x - 2y},$$

$$y' = \frac{-2x^2 y + 4xy^2 - 1}{-2 + x^3 - 2x^2 y}.$$

**Задача 8.** Вычислить с помощью дифференциала приближенное значение числа  $a = (0,85)^{-2/3}$ .

**Решение.** Введем функцию  $y(x) = x^{-2/3}$ .

Используем формулу  $y(a) \approx y(x_0) + dy = y(x_0) + y'(x_0)dx = y(x_0) + y'(x_0)(a - x_0)$ , где выберем  $a = 0,85$ ,  $x_0 = 1$ .

Тогда  $y(x_0) = 1^{-2/3} = 1$ ,

Типовой расчет выполнен на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=tr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=tr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$y'(x) = -\frac{2}{3}x^{-5/3}, \quad y'(x_0) = -\frac{2}{3}1^{-5/3} = -\frac{2}{3},$$

$$a - x_0 = 0,85 - 1 = -0,15.$$

Подставляем:

$$(0,85)^{-2/3} = y(a) \approx 1 - \frac{2}{3} \cdot (-0,15) = 1,1$$

**Задача 9.** Определить, в каких точках заданной линии  $L$  касательная к этой линии параллельна прямой  $y = kx$ , и написать уравнение этой касательной.

$$L: y = x - \sqrt{x}, \quad k = 0.$$

**Решение.** По определению  $k = y'(x_0)$ .

Найдем производную

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$$

Приравняем к  $k = 0$  и получаем:

$$y' = \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = 0,$$

$$2\sqrt{x} - 1 = 0,$$

$$2\sqrt{x} = 1,$$

$$\sqrt{x} = 1/2,$$

$$x = 1/4.$$

Типовой расчет выполнен на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=tr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=tr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Получаем, что касательная проведена в точке  $x_0 = 1/4$ . Уравнение касательной:

$$y - y(x_0) = k(x - x_0),$$

$$y - (-1/4) = 0,$$

$$y = -1/4.$$