Решение задачи Коши для ДУ с помощью формулы Дюамеля

Задание.

С помощью формулы Дюамеля найти решение уравнения

$$x^{III} + x^{I} = tgt, x(0) = x^{I}(0) = x^{II}(0) = 0$$

Решение.

Предполагая, что $x(t)$ - оригинал, обозначим его изображение $X(p)$

Составим вспомогательное уравнение при нулевых начальных условиях:

$$y^{III} + y' = 1$$

По теореме о дифференцировании оригинала:

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p)$$

$$y^{III} = p^3Y(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0) = p^3Y(p)$$

Изображение правой части уравнения:

$$y^{III} + y^{I} \leftrightarrow p^3Y(p) + pY(p)$$

Так как $1 \leftrightarrow \frac{1}{p}$, получим операторное уравнение:

$$p^3Y(p) + pY(p) = \frac{1}{p}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^3+p)} = \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}$$

$$\frac{1}{p^2} \leftrightarrow t$$

$$\frac{1}{p^2+1} \leftrightarrow \sin t$$

$$y(t) = t - \sin t$$

Используя формулу Дюамеля, получим:

$$x(t) = f(t)y(0) + \int_0^t f(t)\, y'(t-\tau)d\tau$$

$$f(t) = tg(t), y(t) = t - \sin t$$

С учетом нулевых начальных условий:

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\,y'(t-\tau)d\tau$$

$$y'(t)=1-\cos t$$

$$x(t)=\int_0^t tg(\tau)\,(1-\cos(t-\tau))d\tau=\int_0^t tg(\tau)\left(1-(\cos t\cos\tau+\sin t\sin\tau)\right)d\tau$$

$$=$$

$$=\int_0^t tg(\tau)\,d\tau-\int_0^t tg(\tau)\cos t\cos\tau\,d\tau-\int_0^t tg(\tau)\sin t\sin\tau\,d\tau$$

Найдем каждый из интегралов

$$I_1=\int_0^t tg(\tau)\,d\tau=-\ln|\cos\tau|\,\Big|_0^t=-(\ln|\cos t|-\ln|\cos 0|)=-\ln|\cos t|$$

$$I_2=\int_0^t tg(\tau)\cos t\cos\tau\,d\tau=\cos t\int_0^t \sin\tau\,d\tau=\cos t\cdot(-\cos\tau)\,\Big|_0^t=$$

$$=-\cos t\,(\cos t-\cos 0)=-\cos t\,(\cos t-1)=\cos t-\cos^2 t$$

$$I_3=\int_0^t tg(\tau)\sin t\sin\tau\,d\tau=\sin t\int_0^t tg(\tau)\sin\tau\,d\tau$$

$$=\left|\begin{matrix} u=tg\,\tau & dv=\sin\tau\,d\tau \\ du=\dfrac{1}{\cos^2\tau}d\tau & v=-\cos\tau\end{matrix}\right|=$$

$$=\sin t\left(-tg\,\tau\cos\tau\,\Big|_0^t+\int_0^t\frac{\cos\tau}{\cos^2\tau}d\tau\right)=\sin t\left(-\sin\tau\,\Big|_0^t+\int_0^t\frac{1}{\cos\tau}d\tau\right)=$$

$$=\sin t\left(-(\sin t-\sin 0)+\int_0^t \sec\tau\,d\tau\right)=$$

$$= \sin t\left(-\sin t + \ln|\sec\tau + tg\,\tau|\,\Big|_0^t\right)$$

$$= \sin t\,\big(-\sin t + (\ln|\sec t + tg\ t| - \ln|\sec 0 + tg\ 0|)\big) =$$

$$= \sin t\,(-\sin t + \ln|\sec t + tg\ t| - \ln 1) = \sin t\,(-\sin t + \ln|\sec t + tg\ t|) =$$

$$= -\sin^2 t + \sin t \ln|\sec t + tg\ t|$$

$$x(t) = \int_0^t tg(\tau)\,(1 - \cos(t-\tau))d\tau$$

$$= \int_0^t tg(\tau)\,d\tau - \int_0^t tg(\tau)\cos t\cos\tau\,d\tau - \int_0^t tg(\tau)\sin t\sin\tau\,d\tau =$$

$$= I_1 - I_2 - I_3 =$$

$$= -\ln|\cos t| - (\cos t - \cos^2 t) - (-\sin^2 t + \sin t\ln|\sec t + tg\ t|) =$$

$$= -\ln|\cos t| - \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t - \sin t\cdot\ln|\sec t + tg\ t| =$$

$$= 1 - \ln|\cos t| - \cos t - \sin t\cdot\ln|\sec t + tg\ t|$$

ОТВЕТ. $x(t) = 1 - \ln|\cos t| - \cos t - \sin t\cdot\ln|\sec t + tg\ t|$