Пример: криволинейный интеграл 2-го рода

ЗАДАНИЕ.

Проверить криволинейный интеграл, который не зависит от пути интегрирования, и найти его значение (двумя способами – непосредственно и с помощью потенциала).

$$\int_{(1;0)}^{(-2;1)} (x-y^2)dy-(x^2-y)dx$$

РЕШЕНИЕ.

Запишем: $I=\int_{(1;0)}^{(-2;1)} (x-y^2)dy-(x^2-y)dx=\int_{(1;0)}^{(-2;1)} \left(y-x^2\right)dx+\left(x-y^2\right)dy$

По условию $Q=x-y^2$, $P=y-x^2$. Проверим, что $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(y-x^2\right)_y^{'}=1=\left(x-y^2\right)_x^{'}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Значит, интеграл не зависит от пути интегрирования.

Найдем интеграл непосредственно.

Пусть интегрирование ведется по прямой, соединяющей точки $A(1,0)$ и $B(-2,1)$, то есть по прямой:

$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-0}{1-0}$,

$\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{1}$,

$x-1=-3y$,

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$.

То есть $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$, $dy=-\frac{1}{3}dx$, $x=[1;-2]$. Получаем:

$$I=\int_{(1;0)}^{(-2;1)}\left(y-x^2\right)dx+\left(x-y^2\right)dy=\int_1^{-2}\left[\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}-x^2\right)-\frac{1}{3}\left(x-\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2\right)\right]dx=$$

$$=\int_1^{-2}\left[-\frac{26}{27}x^2-\frac{20}{27}x+\frac{10}{27}\right]dx=\frac{1}{27}\int_{-2}^{1}\left[26x^2+20x-10\right]dx=\frac{1}{27}\left(\frac{26}{3}x^3+10x^2-10x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\frac{1}{27}\left(\frac{26}{3}+10-10\right)-\frac{1}{27}\left(\frac{26}{3}(-2)^3+10(-2)^2-10(-2)\right)=\frac{2}{3}.$$

Найдем значение интеграла с помощью потенциала. Восстановим функцию потенциала $U(x,y)$, такую что

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P=y-x^2,\ \frac{\partial U}{\partial y}=Q=x-y^2$$

Интегрируем первое выражение по x:

$$U=\int\frac{\partial U}{\partial x}dx=\int\left(y-x^2\right)dx=yx-\frac{1}{3}x^3+C(y).$$

Дифференцируем по y:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(yx-\frac{1}{3}x^3+C(y)\right)_y'=x+C'(y)=x-y^2,$$

$$C'(y)=-y^2,$$

$$C(y)=-\int y^2dy=-\frac{1}{3}y^3+C.$$

Получили $U=yx-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}y^3+C.$

Тогда интеграл равен:

$$I=\int_{(1;0)}^{(-2;1)}(x-y^2)dy-(x^2-y)dx=\int_A^B(x-y^2)dy-(x^2-y)dx=U(B)-U(A)=$$

$$=\left(-2-\frac{1}{3}(-2)^3-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

Результаты совпали