Контрольная по высшей математике за 1 курс

1. Найдите производные от данных функций:

а) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$, $y'(0)$;

б) $y=\frac{1}{3}tg^3x+tgx+x^2-\frac{\pi}{2}x$, $y'(\frac{\pi}{4})$;

в) $y=\left(arctg\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}\right)\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y'(0)$.

Решение.

$a)\, y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1};$

Т.к. $\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{u}=u^{\frac{1}{3}}$, то воспользуемся формулой из таблицы производных:

$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.

$$y'=(\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1})'=\left|\begin{array}{l}\textit{по правилу производной суммы}:\\(u+v)'=u'+v'\end{array}\right|=$$

$$=(\sqrt{x^2+1})'+(\sqrt[3]{x^3+1})'=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2+1}=(x^2+1)^{\frac{1}{2}};\\\sqrt[3]{x^3+1}=(x^3+1)^{\frac{1}{3}}\end{array}\right|=\left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)'+\left((x^3+1)^{\frac{1}{3}}\right)'=$$

$$=\left|\ (u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'\ \right|=\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+1)'+\frac{1}{3}(x^3+1)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(x^3+1)'=$$

$$=\left|\begin{array}{l}(x^2+1)'=2x;\\(x^3+1)'=3x^2,\,т.к.\\C'=0,\,C-const;\\(x^2)'=2x;\,(x^3)'=3x^2\end{array}\right|=\frac{1}{2}\cdot(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}\cdot 2x+\frac{1}{3}\cdot(x^2+1)^{\frac{-2}{3}}\cdot 3x^2=$$

$$\left|\begin{array}{l}\textit{по формуле}:\\x^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}\\\textit{перейдем к корням}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$ (первую дробь сократили на 2, вторую на 3).

$$y'(0)=\frac{0}{\sqrt{0^2+1}}+\frac{0^2}{\sqrt[3]{(0^2+1)^2}}=0.$$

$$б)\ y=\frac{1}{3}tg^3x+tgx+x^2-\frac{\pi}{2}x$$

$$y'=(\frac{1}{3}tg^3x+tgx+x^2-\frac{\pi}{2}x)'=\left|\begin{array}{l}\text{по правилу производной суммы:}\\(u+v)'=u'+v';\\(kx)'=k\cdot x',\ к-коэффициент\end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{3}(tg^3x)'+(tgx)'+(x^2)'-\frac{\pi}{2}(x)'=$$

$=\left|\ (u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'\right.$ - производная степени, т.е. $(u^3)'=3\cdot u^2\cdot u'$;

$(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ и $x'=1$- по таблице производных $\left.\right|=$

$$=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot tg^2x\cdot(tgx)'-(tgx)'+2x-\frac{\pi}{2}=tg^2x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}+2x-\frac{\pi}{2}=$$

$$=\frac{tg^2x-1}{\cos^2 x}+2x-\frac{\pi}{2}.$$

$$y'(\frac{\pi}{4})=\frac{tg^2\frac{\pi}{4}-1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}+2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=0.$$

$$в)\ y=(arctg\sqrt{\frac{3-x}{x+2}})\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Это сложная функция, ее производную найдем по формуле: $(arctg\,u)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$,

где

$$u=\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$$

$$y'=\sqrt{\frac{3}{2}}(arctg\sqrt{\frac{3-x}{x+2}})'=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}\right)'=$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{по таблице производных:}\\(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u',\ где\ u=\frac{3-x}{x-2}\end{array}\right|=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{3-x}{x+2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}}\cdot\left(\frac{3-x}{x+2}\right)'=$$

$$\left|\begin{array}{l}\textit{по правилу дифференцирования дроби:}\\ \left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\ \textit{найдем}\ \left(\dfrac{3-x}{x-2}\right)'\end{array}\right|=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\dfrac{x+2+3-x}{x+2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}\cdot\frac{(3-x)'(x+2)-(3-x)(x+2)'}{(x+2)^2}=$$

$$\left|\begin{array}{l}\textit{по таблице производных:}\\ (kx+b)'=k,\ \textit{тогда}\\ (3-x)'=-1;\ (x-2)'=1\end{array}\right|=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x+2}{5}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}\cdot\frac{-(x+2)-(3-x)\cdot 1}{(x+2)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x+2}{5}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}\cdot\frac{-x-2-3+x}{(x+2)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x+2}{5}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}\cdot\frac{-5}{(x+2)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x+2}{5}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}\cdot\frac{-5}{(x+2)^2}=\left|\ \text{сократим на }5(x+2)\ \right|=$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(x+2)}\cdot\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}=$$

| внесем (x-2) под знак корня и

сократим $\left|=-\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(x+2)}\cdot\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}}=-\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{2(x+2)\cdot(3-x)}}=\right.$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2(x+2)(3-x)}}.$$

$$y'(0)=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2(x+2)(3-x)}}=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2\cdot 2\cdot 3}}=-\frac{1}{4}.$$

Ответ. а) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$; 0;

б) $\dfrac{tg^2x-1}{\cos^2 x}+2x-\dfrac{\pi}{2}$; 0;

в) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2(x+2)(3-x)}}$; $-\dfrac{1}{4}$.

2. Дана функция $y=4[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}]$. Найти y'', $y''(\left(\frac{6}{5}\right))$.

Решение.

$$y'=4[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}]'$$

$$=\left|\begin{array}{l} \\ \\ \textit{по правиам производной суммы и произведения}: \\ (u+v)'=u'+v';\quad u=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2},\quad v=2\arcsin\frac{x}{2} \\ (u\cdot v)'=u'v+uv',\,\textit{где}\,u=\frac{x}{2},v=\sqrt{4-x^2}; \\ \textit{по таблице производных}:(x^2)'=2x; \\ (\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u',\,\textit{где}\,u=4-x^2; \\ (4-x^2)'=-9\cdot 3\cdot x^2=-27x^2;\quad (\frac{x}{2})'=\frac{1}{2}; \\ (\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u';\quad (\arcsin\frac{x}{2})'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot(\frac{x}{2})'=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \end{array}\right|=$$

$$=4[(\frac{x}{2})'\sqrt{4-x^2}+\frac{x}{2}(\sqrt{4-x^2})'+2(\arcsin\frac{x}{2})']$$

$$=4[\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)+\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}]=4[\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\sqrt{4-x^2}}+\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}]=$$

$$=4[\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}-\frac{x^2-4}{2\sqrt{4-x^2}}]=4[\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+\frac{4-x^2}{2\sqrt{4-x^2}}]=$$

$$4[\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}]=4\sqrt{4-x^2}$$

$$y''=4(\sqrt{4-x^2})'=4\cdot\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{4x}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$y''(\frac{6}{5})=-\frac{4\cdot\frac{6}{5}}{\sqrt{4-(\frac{6}{5})^2}}=-\frac{4\cdot 6\cdot 5}{5\cdot\sqrt{100-36}}=-\frac{4\cdot 6\cdot 5}{5\cdot 8}=-3.$$

Ответ. $y'' = -\dfrac{4x}{\sqrt{4-x^2}}$; -3.

3. Дана функция $f(x) = \begin{bmatrix} (x-4)/x \\ x/(x-1) \\ x^2-9 \end{bmatrix}$. Найти $f'(x)$ и $f''(x)$. Вычислить $f'(2)$ и $f''(2)$.

Решение.

$$f'(x) = \begin{bmatrix} ((x-4)/x)' \\ (x/(x-1))' \\ (x^2-9)' \end{bmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{x-4}{x}\right)' = \left(1-\dfrac{4}{x}\right)' = 0 + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4}{x^2} \\ \left(\dfrac{x}{x-1}\right)' = \dfrac{x'(x-1) - x(x-1)'}{(x-1)} = \dfrac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{(x-1)^2} \\ (x^2-9)' = 2x \end{array} \right| = \begin{bmatrix} 4/x^2 \\ -1/(x-1)^2 \\ 2x \end{bmatrix};$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 4/x^2 \\ -1/(x-1)^2 \\ 2x \end{bmatrix}; \quad f'(2) = \begin{bmatrix} 4/2^2 \\ -1/(2-1)^2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$f''(x) = \begin{bmatrix} (4/x^2)' \\ (-1/(x-1)^2)' \\ (2x)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/x^3 \\ 2/(x-1)^3 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$f''(x) = \begin{bmatrix} -8/x^3 \\ 2/(x-1)^3 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad f''(2) = \begin{bmatrix} -8/2^3 \\ 2/(2-1)^3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ответ. $f'(x) = \begin{bmatrix} 4/x^2 \\ -1/(x-1)^2 \\ 2x \end{bmatrix}$; $f'(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$;

$$f''(x)=\begin{bmatrix}-8/x^3\\ 2/(x-1)^3\\ 2\end{bmatrix};\ f''(2)=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}.$$

4. Докажите, что функция $z=\ln(x^2+y^2+2x+1)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Решение.

Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln(x^2+y^2+2x+1)\right)'_x=\frac{1}{x^2+y^2+2x+1}\cdot(x^2+y^2+2x+1)'_x=\left|\begin{matrix}x'_x=1\\ y^2-const\\ (y^2)'_x=0\\ 1'=0\end{matrix}\right|=.$$

$$=\frac{2x+2}{x^2+y^2+2x+1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln(x^2+y^2+2x+1)\right)'_y=\frac{1}{x^2+y^2+2x+1}\cdot(x^2+y^2+2x+1)'_y=\left|\begin{matrix}x^2;2x-const\\ (x^2)'_y=0\\ (2x)'_y=0\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2y}{x^2+y^2+2x+1};$$

Находим частные производные второго порядка

.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{2x+2}{x^2+y^2+2x+1}\right)'_x=$$

$$\frac{(2x+2)'_x(x^2+y^2+2x+1)-(2x+2)(x^2+y^2+2x+1)'_x}{(x^2+y^2+2x+1)^2}=$$

$$=\frac{2(x^2+y^2+2x+1)-(2x+2)(2x+2)}{(x^2+y^2+2x+1)^2}=\frac{2x^2+2y^2+4x+2-4x^2-8x-4}{(x^2+y^2+2x+1)^2}=$$

$$=\frac{2y^2-2x^2-4x-2}{(x^2+y^2+2x+1)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{2x+2}{x^2+y^2+2x+1}\right)'_y=$$

$$\frac{(2x+2)'_y(x^2+y^2+2x+1)-(2x+2)(x^2+y^2+2x+1)'_y}{(x^2+y^2+2x+1)^2}==\frac{0-2y(2x+2)}{(x^2+y^2+2x+1)^2}=$$

$$\frac{-4xy-4y}{(x^2+y^2+2x+1)^2}=$$

Подставим найденные значения в уравнение: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

$$\frac{2y^2-2x^2-4x-2}{(x^2+y^2+2x+1)^2}+\frac{-4xy-4y}{(x^2+y^2+2x+1)^2}=0;$$

$\frac{2y^2-2x^2-4x-2-4xy-4y}{(x^2+y^2+2x+1)^2}=0-$ не является тождеством.

Ответ. Функция не удовлетворяет уравнению.

5. Дана функция $f(x;y)=\begin{bmatrix}3tg(x+3y)\\ \sin(4x+8y)\end{bmatrix}$. Найти $f'(x;y)$. Вычислить $f'(-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12})$.

Решение. $f'(x;y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{bmatrix};$

$$f'(x;y)=\begin{bmatrix} 3(tg(x+3y))'_x & 3(tg(x+3y))'_y \\ (\sin(4x+8y))'_x & (\sin(4x+8y))'_y \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{3}{\cos^2(x+3y)}\cdot(x+3y)'_x & \dfrac{3}{\cos^2(x+3y)}\cdot(x+3y)'_y \\ \cos(4x+8y)\cdot(4x+8y)'_x & \cos(4x+8y)\cdot(4x+8y)'_y \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{3}{\cos^2(x+3y)}\cdot 1 & \dfrac{3}{\cos^2(x+3y)}\cdot 3 \\ \cos(4x+8y)\cdot 4 & \cos(4x+8y)\cdot 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{3}{\cos^2(x+3y)} & \dfrac{9}{\cos^2(x+3y)} \\ 4\cos(4x+8y) & 8\cos(4x+8y) \end{bmatrix};$$

$$f'(-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12})=\begin{bmatrix} \dfrac{3}{\cos^2(-\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{12})} & \dfrac{9}{\cos^2(-\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{12})} \\ 4\cos(-\frac{4\pi}{12}+\frac{8\pi}{12}) & 8\cos(-\frac{4\pi}{12}+\frac{8\pi}{12}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{3}{\cos^2\frac{\pi}{6}} & \dfrac{9}{\cos^2\frac{\pi}{6}} \\ 4\cos\frac{\pi}{3} & 8\cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{3}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} & \dfrac{9}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\ 4\cdot\frac{1}{2} & 8\cdot\frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Сумма элементов матрицы: 4+12+2+4=22.

Ответ. 22.

6.

Для функции $u=7\ln(x^2+y^2+z^2)$. Найти:

а) координаты вектора градиента в точке $A(3;-2;1)$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial a}$ в точке А в направлении вектора $\bar{a}\{1;2;2\}$.

Решение.

а) Найдем частные производные функции.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(7\ln(x^2+y^2+z^2)\right)'_x=\frac{1}{x^2+y^2+2x+1}\cdot(x^2+y^2+z^2)'_x=\left|\begin{array}{l} x'_x=1 \\ y^2,z^2-const \\ (y^2)'_x=0 \\ (z^2)'_x=0 \end{array}\right|=.$$

$$=7\cdot\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}=\frac{14x}{x^2+y^2+z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(7\ln(x^2+y^2+z^2)\right)'_y=\frac{1}{x^2+y^2+2x+1}\cdot(x^2+y^2+z^2)'_y=\left|\begin{array}{l} y'_y=1 \\ x^2,z^2-const \\ (x^2)'_y=0 \\ (z^2)'_y=0 \end{array}\right|=$$

$$=7\cdot\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}=\frac{14y}{x^2+y^2+z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(7\ln(x^2+y^2+z^2)\right)'_z=\frac{1}{x^2+y^2+2x+1}\cdot(x^2+y^2+z^2)'_z=\left|\begin{array}{l} z'_z=1 \\ y^2,x^2-const \\ (y^2)'_z=0 \\ (x^2)'_z=0 \end{array}\right|=$$

$$=7\cdot\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}=\frac{14z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$grad\,u=\{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(A)};\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(A)};\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(A)}\}.$$

$$grad\,u=\{\frac{14x}{x^2+y^2+z^2};\frac{14y}{x^2+y^2+z^2};\frac{14z}{x^2+y^2+z^2}\}.$$

Найдем градиент в точке А, подставив координаты точки:

$$grad\,u=\{\frac{14\cdot 3}{3^2+(-2)^2+1^2};\frac{14\cdot(-2)}{3^2+(-2)^2+1^2};\frac{14\cdot 1}{3^2+(-2)^2+1^2}\};$$

$$grad\,u=\{\frac{42}{14};\frac{-28}{14};\frac{14}{14}\};$$

$$grad\,u=\{3;-2;1\}$$

.

2)

Производную в точке A в направлении вектора $\overline{a}=\{1;2;2\}$ найдем по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial a}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A\cdot\cos\gamma\ ,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора (координаты единичного вектора $\vec{e}$, соответствующего вектору $\overline{a}=\{1;2;2\}$).

$$\vec{e}=\{\frac{x_a}{|\overline{a}|};\quad \frac{y_a}{|\overline{a}|};\frac{z_a}{|\overline{a}|}\};\quad x_{\overline{a}}, y_{\overline{a}}, z_{\overline{a}}$$ - координаты вектора $\overline{a}$.

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3;$$

$$\vec{e}=\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial a}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A\cdot\cos\gamma=3\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Ответ. $grad\,u=\{3;-2;1\}$; $\frac{\partial u}{\partial a}=\frac{1}{3}$.

7. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases}x=\cos^2 t,\\ y=\ln\sin t.\end{cases}$ Вычислить y''_{xx}, если $t=\frac{\pi}{6}$.

Решение.

Найдем y'_x $\qquad y'_t=(\ln\sin t)'=\frac{1}{\sin t}\cdot(\sin t)'=\frac{\cos t}{\sin t}=ctgt$;

$$x'_t=(\cos^2 t)'=2\cos t\cdot(\cos t)'=-2\sin t\cos t=\sin 2t.$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{ctgt}{2\sin t\cos t}=-\frac{\cos t}{2\sin t\sin t\cos t}=-\frac{1}{2\sin^2 t}.$$

Найдем y''_{xx}.

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\left(-\dfrac{1}{2\sin^2 t}\right)'}{-2\sin t\cos t}=\frac{1}{4}\frac{\left(\dfrac{1}{\sin^2 t}\right)'}{\sin t\cos t}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{-2\sin^{-3}t(\sin t)'}{\sin t\cos t}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos t}{\sin^3 t\sin t\cos t}=-\frac{1}{2\sin^4 t}$$

При $t=\dfrac{\pi}{6}$ $y''_{xx}=-\dfrac{1}{2\sin^4\dfrac{\pi}{6}}=-\dfrac{1}{2\cdot\dfrac{1}{16}}=-8$.

Ответ. $y''_{xx}=-\dfrac{1}{2\sin^4 t}$; $\quad -8$.

8. Функция $z=z(x;y)$ задана неявно уравнением $z^3+3x^2z=2xy$. Вычислить $\dfrac{\partial z}{\partial x}(-1;0;0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(-1;0;0)$.

Решение.

Частные производные найдем по формулам: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}$.

Т.к. $z^3+3x^2z=2xy$, то

$F(x;y;z)=z^3+3x^2z-2xy$;

1) $F'_x(x;y;z)\big|_{y,z-const}=(z^3+3x^2z-2xy)'_x=6xz-2y$;

2) $F'_y(x;y;z)\big|_{x,z-const}=(z^3+3x^2z-2xy)'_y=-2x$;

3) $F'_z(x;y;z)\big|_{x,y-const}=(z^3+3x^2z-2xy)'_z=3z^2+3x^2$.

Подставим найденное в формулы частных производных:

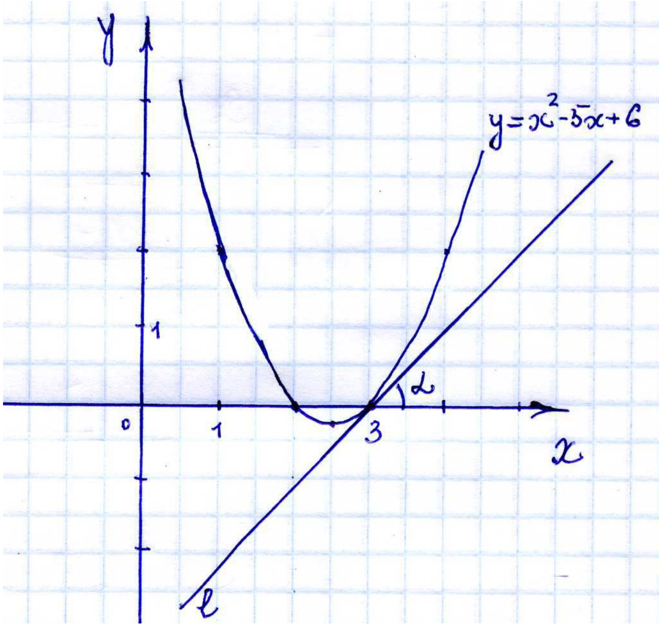
а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}=\dfrac{6xz-2y}{3z^2+3x^2}$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}(-1;0;0)=\dfrac{0}{3}=0$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}=\dfrac{-2x}{3z^2+3x^2}$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}(-1;0;0)=\dfrac{2}{3}$

Ответ. а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{6xz-2y}{3z^2+3x^2}$; $\quad 0$; $\qquad$ б) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-2x}{3z^2+3x^2}$; $\quad \dfrac{2}{3}$.

9. Найти острый угол между осью Ох и касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 6$ в точке $x_0 = 3$.

Решение.



Касательная l имеет уравнение $y = kx + b$, $k -$угловой коэффициент касательной. $k = tg\alpha$, $\alpha -$угол между осью Ох и касательной.

$k = tg\alpha = y'(x) = (x^2 - 5x + 6)' = 2x - 5;$

В точке $x_0 = 3$: $tg\alpha = 2\cdot 3 - 5 = 1$; $\alpha = arctg1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{4}$.

10. Найти dy, если $y = \arcsin x$. Вычислить значение dy, если $x = 0, \Delta x = 0{,}08$.

Решение.

$dy = y'(x)dx$

$y' = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$dy = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

$dy = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \Delta x = \dfrac{1}{\sqrt{1-0}}\cdot 0{,}08 = 0{,}08$.

Ответ. $dy = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 0,08.

11. Дана функция $z = 3x^2 - xy + x + y$ и точки $M_0(1;3)$ и $M_1(1{,}06;2{,}92)$. Вычислить Δz и dz при переходе из точки M_0 в точку M_1.

Решение. $z(M_1) = 3 \cdot 1{,}06^2 - 1{,}06 \cdot 2{,}92 + 1{,}06 + 2{,}92 = 4{,}2556$;

$dz = z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y$ - полный дифференциал

$\Delta x = 1{,}06 - 1 = 0{,}06; \quad \Delta y = 2{,}92 - 3 = -0{,}08$;

$z(M_0) = 3 - 3 + 1 + 3 = 4$

$z'_x = (3x^2 - xy + x + y)'_x = 6x - y + 1; \quad z'_x(M_0) = 6 - 3 + 1 = 4;$

$z'_y = (3x^2 - xy + x + y)'_y = -x + 1; \quad z'_y(M_0) = -1 + 1 = 0;$

$dz = z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y = 4 \cdot 0{,}06 + 0 \cdot (-0{,}08) = 0{,}24$;

$\Delta z = z(M_1) - z(M_0) = 4{,}2556 - 4 = 0{,}2556 \approx 0{,}26$ - приращение функции

Ответ. $\Delta z = 0{,}26; \quad dz = 0{,}24.$

12. Найти наибольшее и наименьшее значение функций на заданных отрезках
$f(x) = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}$ на заданном отрезке $[1;4]$.

Решение.
Функция определена и непрерывна на отрезке $[1;4]$, наибольшее или наименьшее значения она может достигать на концах отрезка или в точке экстремума.
Найдем значение функции на концах отрезка и в стационарных точках, принадлежащих отрезку.
1) Значения функции на концах отрезка:

$f(1) = 4 - 1 - \dfrac{4}{1^2} = -1;$

$f(4)=4-4-\frac{4}{4^2}=-\frac{1}{4}$;

2) Найдем стационарные точки.

$f'(x)=(4-x-\frac{4}{x^2})'=-1+\frac{8}{x^3}=\frac{8-x^3}{x^3}$ (по таблице производных: *т.к.*

$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$, *то* $(4x^{-2})'=4\cdot(-2)x^{-3}=\frac{-8}{x^3}$; $x'=1$; *т.к.* $C'=0$, *то* $4'=0$).

$f'(x)=0;\quad \frac{8-x^3}{x^3}=0;$

$\begin{cases} 8-x^3=0; \\ x^3\neq 0. \end{cases};$

$\begin{cases} x=2; \\ x\neq 0 \end{cases}$

$x=2\in[1;4]$, найдем $f(2)$

$f(2)=4-2-\frac{4}{2^2}=1$

Из найденных значений:

$f(1)=-1$

$f(4)=-\frac{1}{4}$ - наименьшее

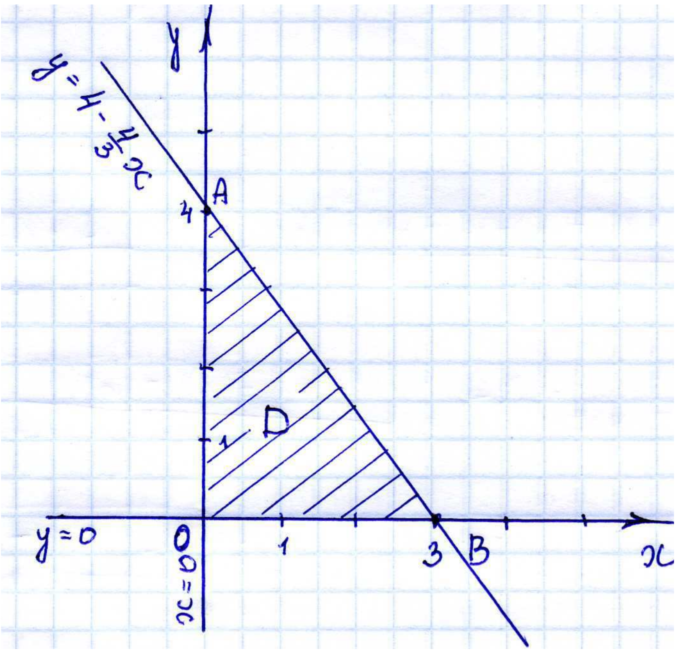
$f(2)=1$ - наибольшее.

Ответ. $f(4)=-\frac{1}{4}$ - наименьшее значение функции

$f(2)=1$ - наибольшее значение функции.

13. Дана функция $z=\frac{xy}{2}-\frac{x^2y}{6}-\frac{xy^2}{8}$. Найти ее наименьшее и наибольшее значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми y=0, x=0, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

Решение.



Область D ограничена прямыми: $y=0$, $x=0$, $y=4-\dfrac{4}{3}x$.

$O(0;0)$; $A(0;4)$; $B(3;0)$.

1) Найдем стационарные точки, лежащие внутри области D из условия:

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

$$z'_x(y-const) = \left(\frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}\right)'_x = \frac{y}{2} - \frac{2xy}{6} - \frac{y^2}{8} = \frac{y}{2} - \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{8};$$

$$z'_y(x-const) = \left(\frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}\right)'_y = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{2xy}{8} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{xy}{4};$$

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2} - \dfrac{xy}{3} - \dfrac{y^2}{8} = 0; & \Big|\cdot 24 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{xy}{4} = 0. & \Big|\cdot 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 12y - 8xy - 3y^2 = 0; \\ 6x - 2x^2 - 3xy = 0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения y $\left(3xy = 6x - 2x^2;\quad y = 2 - \dfrac{2}{3}x\right)$ и подставим в первое уравнение: $12\left(2-\dfrac{2}{3}x\right) - 8x\left(2-\dfrac{2}{3}x\right) - 3\left(2-\dfrac{2}{3}x\right)^2 = 0$;

$$24 - 8x - 16x + \frac{16}{3}x - 12 + 8x - \frac{4}{3}x^2 = 0;$$

$$24 - 16x + \frac{16}{3}x^2 - 12 - \frac{4}{3}x^2 = 0;$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0;$$

$x^2-4x+3=0$;

$\begin{cases} x_1+x_2=4; \\ x_1\cdot x_2=3. \end{cases}$

$x_1=1;\quad x_2=3$.

$y_1=2-\frac{2}{3}=1\frac{1}{3};\quad y_2=2-\frac{2}{3}\cdot 3=0$

$(1;1\frac{1}{3})\in D\quad (3;0)\in D$

Найдем значения функции в этих точках:

$$z(1;1\frac{1}{3})=\frac{1\cdot\frac{4}{3}}{2}-\frac{1\cdot\frac{4}{3}}{6}-\frac{1\cdot\frac{16}{9}}{8}=\frac{2}{3}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}=\frac{2}{9};$$

$z(1;1\frac{1}{3})=\frac{2}{9}$.

$z(3;0)=0$.

2) найдем наибольшее, наименьшее значения функции на границах области.

На границе $0A$: $\quad x=0;\quad y\in[0;4];\quad z(x;y)=z(0;y)=0$

Значение функции в точке A(0;4):

$z(A)=z(0;4)=0$;

Значение функции в точке O(0;0):

$z(O)=z(0;0)=0$

На границе AB:

$$y=4-\frac{4}{3}x;\quad x\in[0;3];\quad z(x;y=4-\frac{4}{3}x)=\frac{x(4-\frac{4}{3}x)}{2}-\frac{x^2(4-\frac{4}{3}x)}{6}-\frac{x(4-\frac{4}{3}x)^2}{8}=$$

$$=2x-\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{9}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{9}x^3=\frac{3}{2}x;$$

$z'_x=\frac{3}{2}$

$z'_x\neq 0$ – на границе AB нет стационарных точек

Значение функции в точке B(3;0):

$z(B)=z(3;0)=0$

На границе OB: $\quad y=0;\quad x\in[0;3];\quad z(x;y=0)=0$.

Из полученных значений функции выбираем наибольшее, наименьшее:

$z(1;1\frac{1}{3})=\frac{2}{9}$ - наибольшее

$z(0;4)=z(3;0)=z(0;0)=0$ - наименьшее

Ответ. $z_{наим}=z(0;4)=z(3;0)=z(0;0)=0$; $z_{наиб}=z(1;1\frac{1}{3})=\frac{2}{9}$.

14. Провести полное исследование функции $y=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$ и начертить ее график

Решение.

1) *D(y):* $x\neq 0$.
2)
а) Исследуем функцию на четность и нечетность:

$y(-x)=\frac{3}{-x}-\frac{1}{(-x)^3}=-(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3})$

Условие *y(-x)=-y(x)* выполняются, поэтому функция является нечетной.
б) Функция непериодическая.
в) Найдем точки пересечения с осью *Ox* (для этого решим уравнение *y*=0).

$\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}=0$; $\frac{3x^2-1}{x^3}=0$; $3x^2=1$; $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x\neq 0$;

$(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};0)$

Точек пересечения с осью *Oy* (*x*=0) нет, т.к. *y*(0) – не существует.
3) Исследуем функцию на монотонность и экстремум.

$$y'=(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3})'=\left|\begin{array}{l}(u+v)'=u'+v'\\ (x^n)'=nx^{n-1}\\ \frac{3}{x}=3x^{-1}\\ \frac{1}{x^3}=x^{-3}\end{array}\right|=-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^4}=\frac{3-3x^2}{x^4}=\frac{3(1-x^2)}{x^4}.$$

y′=0; $\frac{3(1-x^2)}{x^4}$ $1-x^2=0$; $x=\pm 1$; $x\neq 0$.

Исследуем знаки производной на интервалах, на которые область определения функции разбивается этими точками.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	(	$(0;1)$	1	$(0;+\infty)$
y′	$-$	0	+		+	0	$-$
y	↘	-2	↗		↗	2	↘

$y_{\min} = y(-1) = -2; \quad y_{\max} = y(1) = 2$

2) Найдём интервалы выпуклости, вогнутости графика, точки перегиба.
Находим вторую производную.

$$y'' = \left(-\frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right)' = \frac{6}{x^3} - \frac{12}{x^5} = \frac{6x^2 - 12}{x^5} = \frac{6(x^2-2)}{x^5}.$$

$$y'' = 0; \quad \frac{6(x^2-2)}{x^5} = 0; \quad x^2 - 2 = 0; \quad x \pm \sqrt{2}; \quad x \neq 0$$

Исследуем знак y″ на интервалах, на которые область определения разбивается этими точками.

x	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$-\sqrt{}$	$(-\sqrt{2};0)$	0	$(0;\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};+\infty;)$
y″	+	0	$-$	-	$-$		+
y	вогнутый	$-\frac{}{2}$ $\approx -$	выпуклый	-	выпуклый	$\frac{5}{2\sqrt{2}}$ $\approx 1{,}8$	вогнутый

$(-\sqrt{2}; -\frac{5}{2\sqrt{2}})$; $(\sqrt{2}; \frac{5}{2\sqrt{2}})$ – точки перегиба графика функции.

5) Асимптоты графика функции.
а) Вертикальные асимптоты.

$$\lim_{x \to 0_{-0}} \frac{3x^2 - 1}{x^3} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 0_{+0}} \frac{3x^2-1}{x^3} = -\infty.$$

x =0 – вертикальная асимптота.

б) Наклонные асимптоты найдем из условия: $y=kx+b$, $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{x^3\cdot x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{x^4}$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x^4, получим:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{1}=0,$$

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{1}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{x^3}-0=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

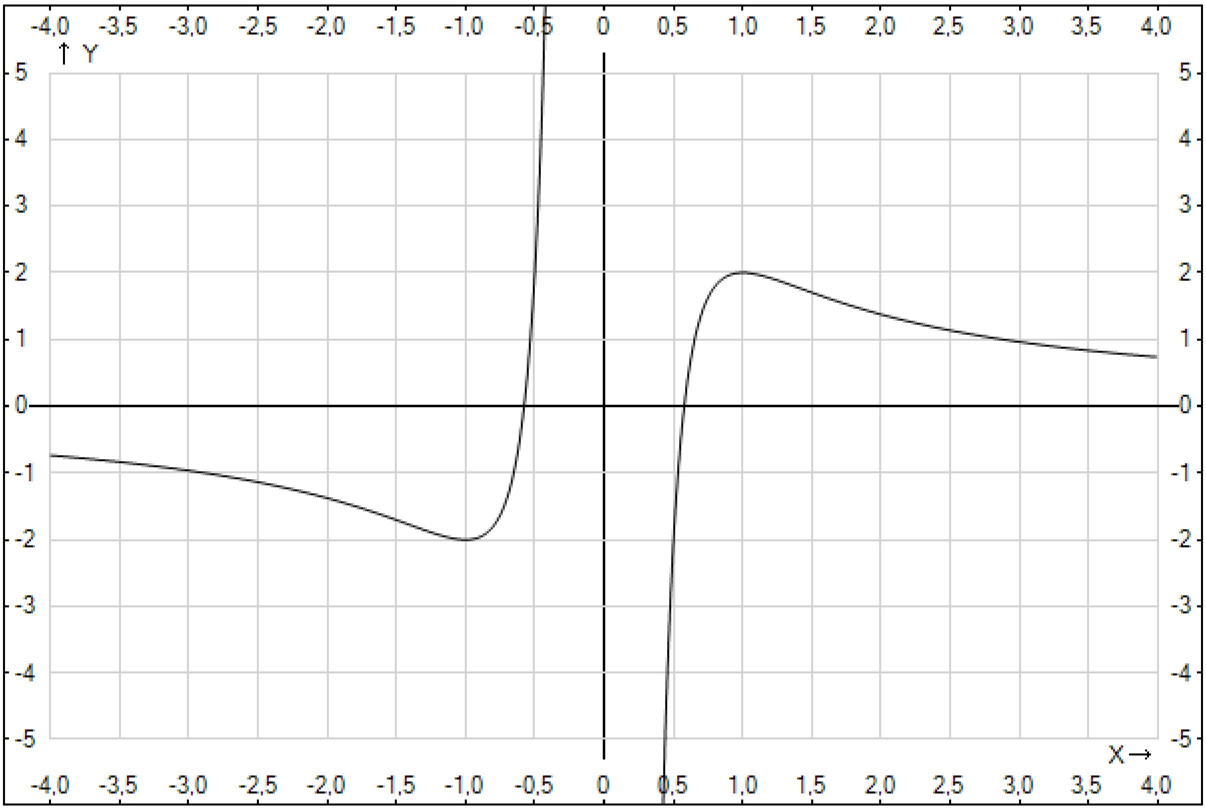
Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x^3, получим:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}{0}=0$$

$y=0$ - горизонтальная асимптота графика функции.

3) Дополнительные точки:

x	-3	-2	2	3
y	≈ -1	$\approx -1{,}4$	$\approx 1{,}4$	≈ 1


-4,0 -3,5 -3,0 -2,5 -2,0 -1,5 -1,0 -0,5 0 0,5 1,0 1,5 2,0 2,5 3,0 3,5 4,0
Y
5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5
X