# Контрольная работа по алгебре. Векторная алгебра

**Задача 1.** Пусть $L_1$ □ линейная оболочка векторов $\{\boldsymbol{a}_i\}$, а $L_2$ □ линейная оболочка векторов $\{\boldsymbol{b}_i\}$. Найти базисы пространств $L_1$, $L_2$, $(L_1+L_2)$ и $(L_1\cap L_2)$, если:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

**Решение.** Найдем базис пространства $(L_1+L_2)$. Для этого приведем с помощью ЭПС матрицу, составленную из координат всех векторов к ступенчато – треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} \\ \gamma_1 \\ \gamma_2-2\gamma_1 \\ \gamma_3-\gamma_1 \\ \gamma_4-\gamma_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} \gamma_1-\gamma_2 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3-2\gamma_2 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Векторы $a_1, a_3, b_3$ образуют базис $(L_1+L_2)$, а векторы $a_1, a_3$ образуют базис $L_1$. Для нахождения базиса $L_2$ преобразуем матрицу, составленную из координат векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2-\gamma_1 \\ \gamma_3+3\gamma_1 \\ \gamma_4-\gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3-5\gamma_2 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \gamma_1-\gamma_2 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Векторы $b_1, b_2$ линейно независимы, и, следовательно, образуют базис $L_2$. Так как $\dim L_1+\dim L_2=\dim(L_1+L_2)+\dim(L_1\cap L_2)$, то $\dim(L_1\cap L_2)=2+2-3=1$.

Найдем базис $(\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2)$. Пересечение $(\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2)$ состоит из векторов, которые одновременно являются линейными комбинациями, как векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, так и векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$. Разложим вектор $b_1$, входящий в базис $\mathrm{L}_2$, но не входящий в базис $(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)$, по базису $a_1, a_3, b_3$. Пусть $b_1 = a_1 x + a_3 y + b_3 z$, то есть

$$\begin{cases} x + 2z = 3, \\ y - z = -1, \\ -2z = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -1/2, \\ z = 1/2. \end{cases}$$

Получаем $b_1 = 2a_1 - \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}b_3$, то есть $c = b_1 - \frac{1}{2}b_3 = 2a_1 - \frac{1}{2}a_3$, этот вектор раскладывается по обоим базисам, его можно выбрать в качестве базиса подпространства $(\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2)$

**Задача 2.** Дополнить до ортогонального базиса систему векторов.

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Векторы $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}_4$, дополняющие $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ до ортогонального базиса, удовлетворяют условиям: $\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_1) = 0 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_2) = 0 \end{cases}$.

Сначала найдем $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}_3$.

Для решения этой системы уравнений преобразуем ее матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

Выберем $\boldsymbol{f}_3 = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$.

Вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}_4$ должен удовлетворять условиям: $\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_1) = 0 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_2) = 0 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_3) = 0 \end{cases}$.

Эта система уравнений эквивалентна системе с матрицей

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 9/2\\ 0 & 0 & 1 & -5/2\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 9/2\\ 0 & 0 & 1 & -5/2\\ 0 & -2 & 0 & -9/2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 9/2\\ 0 & 0 & 1 & -5/2\\ 0 & 1 & 0 & 9/4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 9/4\\ 0 & 0 & 1 & -5/2\\ 0 & 1 & 0 & 9/4\end{pmatrix}$$

Вектор $\boldsymbol{f}_4 = (-9/4 \quad -9/4 \quad 5/2 \quad 1)^{\mathrm{T}}$.

Получили векторы $\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{f}_4$, ортогональные друг другу и векторам $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$.

*Примечание:* Данные в условии вектора $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ не ортогональны, поэтому базис не будет ортогональным.

**Задача 3.** Найти проекцию $X'$ и ортогональную составляющую $X^{\perp}$ вектора $X$ на подпространство $\mathrm{L}$.

$X = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{a}_2)$ , если $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

**Решение.** В разложении $X = X' + X^{\perp}$ проекция $X' \in \mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, т.е. имеет вид $X' = x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2$. Следовательно $X = x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + X^{\perp}$.

Умножив последовательно это равенство скалярно на $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, получим, учитывая ортогональность $X^{\perp}$ подпространству $\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)$, следующую систему уравнений $\begin{cases} x(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) + y(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{a}_1, X) \\ x(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) + y(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{a}_2, X) \end{cases}$.

Для заданных векторов эта система принимает вид

$$\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}.$$

Подставив решения системы $x = -1, y = 1$ в разложение $X'$, получим $X' = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, а $X^{\perp} = X - X' = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.