Элементы линейной алгебры

Контрольная работа

Задача 1. Даны две матрицы A и B. Найти $(2A^T-3B)\cdot(A+2B^T)$.

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\4&3&2\\2&2&-7\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&7&0\\5&3&1\\1&-6&1\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^T=\begin{pmatrix}3&4&2\\1&3&2\\0&2&-7\end{pmatrix}$$

$$2A^T=2\cdot\begin{pmatrix}3&4&2\\1&3&2\\0&2&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&8&4\\2&6&4\\0&4&-14\end{pmatrix}$$

$$3B=3\cdot\begin{pmatrix}2&7&0\\5&3&1\\1&-6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&21&0\\15&9&3\\3&-18&3\end{pmatrix}$$

$$2A^T-3B=\begin{pmatrix}6&8&4\\2&6&4\\0&4&-14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&21&0\\15&9&3\\3&-18&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-13&4\\-13&-3&1\\-3&22&-17\end{pmatrix}$$

$$B^T=\begin{pmatrix}2&5&1\\7&3&-6\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$2B^T=2\cdot\begin{pmatrix}2&5&1\\7&3&-6\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&10&2\\14&6&-12\\0&2&2\end{pmatrix}$$

$$A+2B^T=\begin{pmatrix}3&1&0\\4&3&2\\2&2&-7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&10&2\\14&6&-12\\0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&11&2\\18&9&-10\\2&4&-5\end{pmatrix}$$

$$(2A^T-3B)\cdot(A+2B^T)=\begin{pmatrix}0&-13&4\\-13&-3&1\\-3&22&-17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&11&2\\18&9&-10\\2&4&-5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0-234+8&0-117+16&0+130-20\\-91-54+2&-143-27+4&-26+30-5\\-21+396-34&-33+198-68&-6-220+85\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-226&-101&110\\-143&-166&-1\\341&97&-141\end{pmatrix}$$

Задача 2. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется: 1) найти ее решение с помощью формул Крамера; 2) записать систему в матричной форме и решить ее средствами матричного исчисления, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение.

$$\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3=-5,\\x_1+9x_2-4x_3=-1,\\2x_1-6x_2+3x_3=-6.\end{cases}$$

Решение.

1) Найдем определитель главной матрицы системы.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&-2\\1&9&-4\\2&-6&3\end{vmatrix}=27+12-24+36-9-24=18$$

Найдем определители, заменив каждый столбец столбцом свободных членов.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-5&3&-2\\-1&9&-4\\-6&-6&3\end{vmatrix}=-135-12+72-108+9+120=-54$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-5&-2\\1&-1&-4\\2&-6&3\end{vmatrix}=-3+40+12-4+15-24=36$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 9 & -1 \\ 2 & -6 & -6 \end{vmatrix} = -54 + 30 - 6 + 90 + 18 - 6 = 72$$

Найдем решение системы уравнений.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-54}{18} = -3$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{36}{18} = 2$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{72}{18} = 4$$

2) Запишем систему в матричной форме.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 9 & -4 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Найдем обратную матрицу.

Вычислим алгебраические дополнения.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 24 = 3 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 12) = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 18 = 6$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3 + 8) = -11 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 + 2) = 2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 18 = -24 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -(-6 - 6) = 12$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 3 = 6$$

Запишем обратную матрицу.

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -11 & 7 & 2 \\ -24 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A^{-1}A = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -11 & 7 & 2 \\ -24 & 12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 9 & -4 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3+3+12 & 9+27-36 & -6-12+18 \\ -11+7+4 & -33+63-12 & 22-28+6 \\ -24+12+12 & -72+108-36 & 48-48+18 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Найдем решение системы.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -11 & 7 & 2 \\ -24 & 12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -15-3-36 \\ 55-7-12 \\ 120-12-36 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -54 \\ 36 \\ 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -3$

$x_2 = 2$

$x_3 = 4$

Ответ: (–3; 2; 4).

Задача 3. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы третьего порядка.

С. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение.

Составим и решим характеристическое уравнение.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 5 \\ 7 & -2-\lambda & 9 \\ 3 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 5 \\ 7 & -2-\lambda & 9 \\ 3 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -2-\lambda & 9 \\ 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} -$$

$$-0\cdot\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 7 & -2-\lambda \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda)(6-\lambda) - 15(-2-\lambda) =$$ Получим

$$= (-2-\lambda)((4-\lambda)(6-\lambda)-15) = (-2-\lambda)(24-10\lambda+\lambda^2-15) =$$

$$= -(2+\lambda)(\lambda^2-10\lambda+9) = -(2+\lambda)(\lambda-9)(\lambda-1)$$

собственные значения:

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = 9$

Найдем собственные векторы, подставив собственные значения.

$\lambda_1 = -2$

$$\begin{cases} 6x+5z=0 \\ 7x+9z=0 \\ 3x+8z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5z=-6x \\ 9z=-7x \\ 8z=-3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=-\dfrac{6}{5}x \\ z=-\dfrac{7}{9}x \\ z=-\dfrac{3}{8}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Получим собственный вектор:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$

$$\begin{cases} 3x \qquad + 5z = 0 \\ 7x - 3y + 9z = 0 \\ 3x \qquad + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5z = -3x \\ 7x - 3y + 9z = 0 \\ 5z = -3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - 3y - \dfrac{27}{5} x = 0 \\ z = -\dfrac{3}{5} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{35 - 27}{5} x - 3y = 0 \\ z = -\dfrac{3}{5} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = \dfrac{8}{5} x \\ z = -\dfrac{3}{5} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{8}{15} x \\ z = -\dfrac{3}{5} x \end{cases}$$

Получим собственный вектор:

$$X_2 = \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{8}{15} x \\ -\dfrac{3}{5} x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{8}{15} \\ -\dfrac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 9$

$$\begin{cases} -5x+5z=0 \\ 7x-11y+9z=0 \\ 3x-3z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=x \\ 7x-11y+9x=0 \\ z=x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x-11y=0 \\ z=x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{11}{16}y \\ z=\dfrac{11}{16}y \end{cases}$$

Получим собственный вектор:

$$X_3=\begin{pmatrix} \dfrac{11}{16}y \\ y \\ \dfrac{11}{16}y \end{pmatrix}=y\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{11}{16} \\ 1 \\ \dfrac{11}{16} \end{pmatrix}$$

Задача 4. Решить матричные уравнения, используя обратную матрицу.

$$X\cdot A=B.\ A=\begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 14 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для уравнения $X\cdot A=B$ решение имеет вид: $X=B\cdot A^{-1}$. Найдем обратную матрицу A^{-1}.

Обратная матрица может быть найдена по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}^T$.

Определитель матрицы:

$$|A|=\begin{vmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 14 & 3 & 2 \end{vmatrix}=9\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix}=9(2+3)-2(12+14)=1\neq 0..$$

Матрица алгебраических дополнений:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & -1\\ 14 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 1\\ 14 & 3\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}9 & 0\\ 14 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}9 & 2\\ 14 & 3\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}9 & 0\\ 4 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}9 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -22 & -2\\ -4 & 18 & 1\\ -2 & 9 & 1\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}^{T}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}5 & -22 & -2\\ -4 & 18 & 1\\ -2 & 9 & 1\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}5 & -4 & -2\\ -22 & 18 & 9\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Теперь находим решение уравнения:

$$X=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -4 & -2\\ -22 & 18 & 9\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5-22 & -4+18 & -2+9\\ 10-22-2 & -8+18+1 & -4+9+1\\ 5-2 & -4+1 & -2+1\\ 5 & -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17 & 14 & 7\\ -14 & 11 & 6\\ 3 & -3 & -1\\ 5 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

Получили $X=\begin{pmatrix}-17 & 14 & 7\\ -14 & 11 & 6\\ 3 & -3 & -1\\ 5 & -4 & -2\end{pmatrix}$.