Линейная алгебра

Вариант 4

Задание 1. *Систему уравнений привести к равносильной разрешенной системе, включив в набор разрешенных неизвестных* x_1, x_2, x_3. *Записать общее решение, найти соответствующее базисное решение:*

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 20x_5 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 14x_5 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

Решение.

Неизвестная x_n называется разрешенной для системы уравнений, если она входит в одно из уравнений системы с коэффициентом +1, а в остальные уравнения не входит (то есть входит с коэффициентом, равным нулю). Система уравнений называется разрешенной, если каждое уравнение системы содержит разрешенную неизвестную, среди которых нет совпадающих [8].

Приведем исходную систему уравнений к равносильной разрешенной системе. Первое уравнение поделим на 5, чтобы получить перед неизвестной x_1 коэффициент +1:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{5}x_2 + \frac{7}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4 + 4x_5 = \frac{7}{5}; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 14x_5 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

Ко второму уравнению прибавим первое, умноженное на -3, а к третьему – первое уравнение, умноженное на -2. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}8x_2 + 1{,}4x_3 + 1{,}6x_4 + 4x_5 = 1{,}4; \\ -0{,}4x_2 + 0{,}8x_3 + 1{,}2x_4 + 2x_5 = -3{,}2; \\ 1{,}4x_2 + 1{,}2x_3 - 0{,}2x_4 + x_5 = -0{,}8. \end{cases}$$

Второе уравнение поделим на -0,4, чтобы получить перед неизвестной x_2 коэффициент +1:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}8x_2 + 1{,}4x_3 + 1{,}6x_4 + 4x_5 = 1{,}4; \\ x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = 8; \\ 1{,}4x_2 + 1{,}2x_3 - 0{,}2x_4 + x_5 = -0{,}8. \end{cases}$$

К третьему уравнению прибавим второе, умноженное на -1,4:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}8x_2 + 1{,}4x_3 + 1{,}6x_4 + 4x_5 = 1{,}4; \\ x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = 8; \\ 4x_3 + 4x_4 + 8x_5 = -12. \end{cases}$$

Третье уравнение поделим на 4, чтобы получить перед неизвестной x_3 коэффициент +1:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}8x_2 + 1{,}4x_3 + 1{,}6x_4 + 4x_5 = 1{,}4; \\ x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = 8; \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = -3. \end{cases}$$

Прибавим к первому уравнению второе, умноженное на -0,8, чтобы получить перед неизвестной x_2 в этом уравнении коэффициент 0:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 4x_4 + 8x_5 = -5; \\ x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = 8; \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = -3. \end{cases}$$

Прибавим к первому уравнению третье, умноженное на -3, а ко второму – третье, умноженное на 2, чтобы получить перед неизвестной x_2 в этих уравнениях коэффициент 0:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 2x_5 = 4; \\ x_2 - x_4 - x_5 = 2; \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = -3. \end{cases}$$

Мы привели систему уравнений к равносильной разрешенной системе, включив в набор разрешенных неизвестных x_1, x_2, x_3.

Найдем общее решение системы.

Общим решением разрешенной системы уравнений называется совокупность выражений разрешенных неизвестных через свободные члены и свободные неизвестные [8]. В нашем случае общее решение будет выглядеть так:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_4 - 2x_5; \\ x_2 = 2 + x_4 + x_5; \\ x_3 = -3 - x_4 - 2x_5. \end{cases}$$

То есть, $x = (4 - x_4 - 2x_5; 2 + x_4 + x_5; -3 - x_4 - 2x_5; x_4; x_5)$.

Найдем базисное решение системы.

Базисным решением называется частное решение, получающееся из общего при нулевых значениях свободных переменных [8]. Приравнивая свободные переменные к нулю, получаем базисное решение: $x_b = (4;2;-3;0;0)$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 \qquad + x_4 + 2x_5 = 4; \\ \quad x_2 \quad - x_4 - x_5 = 2; \\ \qquad x_3 + x_4 + 2x_5 = -3; \end{cases}$

$x = (4 - x_4 - 2x_5; 2 + x_4 + x_5; -3 - x_4 - 2x_5; x_4; x_5)$; $x_b = (4;2;-3;0;0)$.

Задание 2. *Решите систему уравнений:*

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 4; \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 18; \\ 6x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 4x_4 = 11; \\ 9x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 8x_4 = 13. \end{cases}$$

Решение.

Запишем матрицу системы уравнений и вычислим ее определитель [5, с.70]:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \\ 6 & 9 & 10 & 4 \\ 9 & 14 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \\ 6 & 9 & 10 & 4 \\ 9 & 14 & 16 & 8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 9 & 10 & 4 \\ 14 & 16 & 8 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 6 & 10 & 4 \\ 9 & 16 & 8 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 7 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 4 \\ 9 & 14 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 10 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(8\cdot 10\cdot 8 + 9\cdot 4\cdot 14 + 2\cdot 9\cdot 16 - 14\cdot 10\cdot 2 - 4\cdot 16\cdot 8 - 8\cdot 9\cdot 9) -$$

$$- 5(7\cdot 10\cdot 8 + 9\cdot 4\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 16 - 9\cdot 10\cdot 2 - 4\cdot 16\cdot 7 - 8\cdot 9\cdot 6) +$$

$$+ 6(7\cdot 9\cdot 8 + 8\cdot 4\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 14 - 9\cdot 9\cdot 2 - 4\cdot 14\cdot 7 - 8\cdot 8\cdot 6) -$$

$$-3(7\cdot 9\cdot 16+8\cdot 10\cdot 9+9\cdot 6\cdot 14-9\cdot 9\cdot 9-10\cdot 14\cdot 7-16\cdot 8\cdot 6)=$$

$$=3\cdot(-8)-5\cdot 16+6\cdot 22-3\cdot 7=-24-80+132-21=7.$$

Определитель системы уравнений не равен нулю, значит, по теореме Крамера, система имеет единственное решение.

Решим систему уравнений методом Крамера [2, с.41].

Заменим в матрице A первый столбец на столбец свободных членов и вычислим определитель этой матрицы:

$$\Delta_1=\det(A_1)=\begin{vmatrix}4&5&6&3\\18&8&9&2\\11&9&10&4\\13&14&16&8\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}8&9&2\\9&10&4\\14&16&8\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}18&9&2\\11&10&4\\13&16&8\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}18&8&2\\11&9&4\\13&14&8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}18&8&9\\11&9&10\\13&14&16\end{vmatrix}=$$

$$=4(8\cdot 10\cdot 8+9\cdot 4\cdot 14+2\cdot 9\cdot 16-14\cdot 10\cdot 2-4\cdot 16\cdot 8-8\cdot 9\cdot 9)-$$

$$-5(18\cdot 10\cdot 8+9\cdot 4\cdot 13+2\cdot 11\cdot 16-13\cdot 10\cdot 2-4\cdot 16\cdot 18-8\cdot 9\cdot 9)+$$

$$+6(18\cdot 9\cdot 8+8\cdot 4\cdot 13+2\cdot 11\cdot 14-13\cdot 9\cdot 2-4\cdot 14\cdot 18-8\cdot 8\cdot 11)-$$

$$-3(18\cdot 9\cdot 16+8\cdot 10\cdot 13+9\cdot 11\cdot 14-9\cdot 9\cdot 13-10\cdot 14\cdot 18-16\cdot 8\cdot 11)=$$

$$=4\cdot(-8)-5\cdot 56+6\cdot 74-3\cdot 37=-24-80+132-21=21.$$

Заменим в матрице A второй столбец на столбец свободных членов и вычислим определитель этой матрицы:

$$\Delta_2=\det(A_2)=\begin{vmatrix}3&4&6&3\\7&18&9&2\\6&11&10&4\\9&13&16&8\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}18&9&2\\11&10&4\\13&16&8\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}7&9&2\\6&10&4\\9&16&8\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}7&18&2\\6&11&4\\9&13&8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}7&18&9\\6&11&10\\9&13&16\end{vmatrix}=$$

$$=3(18\cdot 10\cdot 8+9\cdot 4\cdot 13+2\cdot 11\cdot 16-13\cdot 10\cdot 2-4\cdot 16\cdot 18-8\cdot 9\cdot 11)-$$

$$-4(7\cdot 10\cdot 8+9\cdot 4\cdot 9+2\cdot 6\cdot 16-9\cdot 10\cdot 2-4\cdot 16\cdot 7-8\cdot 9\cdot 6)+$$

$$+6(7\cdot 11\cdot 8+18\cdot 4\cdot 9+2\cdot 6\cdot 13-9\cdot 11\cdot 2-4\cdot 13\cdot 7-8\cdot 18\cdot 6)-$$

$$-3(7\cdot 11\cdot 16+18\cdot 10\cdot 9+9\cdot 6\cdot 13-9\cdot 11\cdot 9-10\cdot 13\cdot 7-16\cdot 18\cdot 6)=$$

$$=3\cdot 56-4\cdot 16+6\cdot(-6)-3\cdot 25=168-64-36-75=-7.$$

Заменим в матрице A третий столбец на столбец свободных членов и вычислим определитель этой матрицы:

$$\Delta_3 = \det(A_3) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 18 & 2 \\ 6 & 9 & 11 & 4 \\ 9 & 14 & 13 & 8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 8 & 18 & 2 \\ 9 & 11 & 4 \\ 14 & 13 & 8 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 7 & 18 & 2 \\ 6 & 11 & 4 \\ 9 & 13 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 7 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 4 \\ 9 & 14 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 7 & 8 & 18 \\ 6 & 9 & 11 \\ 9 & 14 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(8\cdot 11\cdot 8 + 18\cdot 4\cdot 14 + 2\cdot 9\cdot 13 - 14\cdot 11\cdot 2 - 4\cdot 13\cdot 8 - 8\cdot 9\cdot 18) -$$

$$-5(7\cdot 11\cdot 8 + 18\cdot 4\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 13 - 9\cdot 11\cdot 2 - 4\cdot 13\cdot 7 - 8\cdot 18\cdot 6) +$$

$$+4(7\cdot 9\cdot 8 + 8\cdot 4\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 14 - 9\cdot 9\cdot 2 - 4\cdot 14\cdot 7 - 8\cdot 8\cdot 6) -$$

$$-3(7\cdot 9\cdot 13 + 8\cdot 11\cdot 9 + 18\cdot 6\cdot 14 - 9\cdot 9\cdot 18 - 11\cdot 14\cdot 7 - 13\cdot 8\cdot 6) =$$

$$= 3\cdot(-74) - 5\cdot(-6) + 4\cdot 22 - 3\cdot(-37) = -222 + 30 + 88 + 111 = 7.$$

Заменим в матрице A четвертый столбец на столбец свободных членов и вычислим определитель этой матрицы:

$$\Delta_4 = \det(A_4) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 18 \\ 6 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 8 & 9 & 18 \\ 9 & 10 & 11 \\ 14 & 16 & 13 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 7 & 9 & 18 \\ 6 & 10 & 11 \\ 9 & 16 & 13 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 7 & 8 & 18 \\ 6 & 9 & 11 \\ 9 & 14 & 13 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 10 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(8\cdot 10\cdot 13 + 9\cdot 11\cdot 14 + 18\cdot 9\cdot 16 - 14\cdot 10\cdot 18 - 11\cdot 16\cdot 8 - 13\cdot 9\cdot 9) -$$

$$-5(7\cdot 10\cdot 13 + 9\cdot 11\cdot 9 + 18\cdot 6\cdot 16 - 9\cdot 10\cdot 18 - 11\cdot 16\cdot 7 - 13\cdot 9\cdot 6) +$$

$$+6(7\cdot 9\cdot 13 + 8\cdot 11\cdot 9 + 18\cdot 6\cdot 14 - 9\cdot 9\cdot 18 - 11\cdot 14\cdot 7 - 13\cdot 8\cdot 6) -$$

$$-4(7\cdot 9\cdot 16 + 8\cdot 10\cdot 9 + 9\cdot 6\cdot 14 - 9\cdot 9\cdot 9 - 10\cdot 14\cdot 7 - 16\cdot 8\cdot 6) =$$

$$= 3\cdot 37 - 5\cdot(-25) + 6\cdot(-37) - 4\cdot 7 = 111 - 125 - 222 - 28 = -14.$$

По формулам Крамера [2, с.41]

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{21}{7} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{7} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1; \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-14}{7} = -2.$$

Ответ: $x = (3; -1; 1; -2)$.

Задание 3. *Решите матричное уравнение*

$$A\cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычислим определитель матрицы A:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{vmatrix}=2\cdot3\cdot(-3)+5\cdot4\cdot5+7\cdot6\cdot(-2)-7\cdot3\cdot5-4\cdot2\cdot(-2)-5\cdot6\cdot(-3)=$$

$$=-18+100-84-105+16+90=-1.$$

Определитель матрицы не равен нулю, значит, матрица A является невырожденной, следовательно, существует обратная к ней матрица A^{-1}. Найдем ее, используя формулу [5, с.76]:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Здесь A_{ij} – алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя матрицы A. Найдем их.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-4\cdot(-2)=-9+8=-1;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}5 & 7\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-(5\cdot(-3)-7\cdot(-2))=15-14=1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 3 & 4\end{vmatrix}=5\cdot4-7\cdot3=20-21=-1;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}6 & 4\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-(6\cdot(-3)-4\cdot5)=-(-18-20)=38;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 5 & -3\end{vmatrix}=2\cdot(-3)-7\cdot5=-6-35=-41;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 7\\ 6 & 4\end{vmatrix}=-(2\cdot4-7\cdot6)=-(8-42)=34;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}6 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=6\cdot(-2)-3\cdot5=-12-15=-27;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 5\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-(2\cdot(-2)-5\cdot5)=-(-4-25)=29;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & 3\end{vmatrix}=2\cdot3-6\cdot5=6-30=-24.$$

Таким образом, матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix};\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}.$$

Решим исходное матричное уравнение, используя найденную матрицу. Умножим на нее обе части уравнения слева:

$$A^{-1}AX=A^{-1}B;\quad EX=A^{-1}B;\quad X=A^{-1}B.$$

Таким образом, решение матричного уравнения

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot(-1) & -1+1 & 1\\ -38\cdot1+41\cdot1 & 41\cdot1-34\cdot1 & -38\\ 27\cdot1-29\cdot1 & -29+24 & 27\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 7 & -38\\ -2 & -5 & 27\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$AX=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 7 & -38\\ -2 & -5 & 27\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5\cdot3+7\cdot(-2) & 5\cdot7-7\cdot5 & 2\cdot1-38\cdot5+27\cdot7\\ 3\cdot3+4\cdot(-2) & 3\cdot7-4\cdot5 & 6\cdot1-38\cdot3+27\cdot4\\ -2\cdot3+(-3)\cdot(-2) & -2\cdot7+3\cdot5 & 5\cdot1-38\cdot(-2)-27\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=B.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 7 & -38\\ -2 & -5 & 27\end{pmatrix}$.

Задание 4. *Найти матрицу, обратную к данной матрице, по схеме* $(A|E)\to(E|A^{-1})$. *Вычислить произведение матриц* $A\cdot A^{-1}$.

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 8 & -7 & -3\\ 4 & -7 & 6 & 3\\ -2 & 4 & -3 & -2\\ -3 & 8 & -7 & -4\end{pmatrix}$$

Решение. Найдем матрицу, обратную к данной матрице, по схеме $(A|E) \to (E|A^{-1})$.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -5 & 8 & -7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & -7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Прибавим к первой строке вторую, затем умножим первую строку на (-1).

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & -7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & -7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Вычитаем из второй строки первую, умноженную на 4. Прибавляем к третьей строке первую, умноженную на 2. Прибавляем к четвертой строке первую, умноженную на 3.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -4 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Прибавим к второй строке третью, затем умножим вторую строку на (-1).

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -4 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -4 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Прибавляем к первой строке вторую. Вычитаем из третьей строки вторую, умноженную на 2. Вычитаем из четвертой строки вторую, умноженную на 5.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 12 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Прибавляем к второй строке третью. Вычитаем из четвертой строки третью.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Прибавляем к первой и второй строке четвертую:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 9 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left(E \mid A^{-1}\right).$$

Получили обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислим произведение матриц $A \cdot A^{-1}$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & -7 & -3 \\ 4 & -7 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & -3 & -2 \\ -3 & 8 & -7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -10+40-14-15 & -20+72-28-24 & -5+32-21-6 & -5+8-3 \\ 8-35+12+15 & 16-63+24+24 & 4-28+18+6 & 4-7+3 \\ -4+20-6-10 & -8+36-12-16 & -2+16-9-4 & -2+4-2 \\ -6+40-14-20 & -12+72-28-32 & -3+32-21-8 & -3+8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Задание 5. *Найти и изобразить на числовой плоскости XOY множество всех значений (x, y), при которых данные матрицы A и B перестановочны, т.е. $A \cdot B = B \cdot A$.*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & y \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} x+y & -1 \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычислим произведения матриц A и B в различном порядке:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & y \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+y & -1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(x+y)+xy & -5+y^2 \\ 1(x+y)+4x & -1+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+5y+xy & -5+y^2 \\ 5x+y & -1+4y \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} x+y & -1 \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & y \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(x+y)-1 & y(x+y)-4 \\ 5x+y & xy+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+5y-1 & xy+y^2-4 \\ 5x+y & xy+4y \end{pmatrix}.$$

По условию, нужно обеспечить равенство $A \cdot B = B \cdot A$ (перестановочность). Получаем:

$$\begin{pmatrix} 5x+5y+xy & -5+y^2 \\ 5x+4 & -1+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+5y-1 & xy+y^2-4 \\ 5x+y & xy+4y \end{pmatrix}$$

Приравниваем элементы матриц и приходим к системе:

$$\begin{cases} 5x+5y+xy = 5x+5y-1, \\ -5+y^2 = xy+y^2-4, \\ 5x+y = 5x+y, \\ -1+4y = xy+4y. \end{cases}$$

Упрощаем ее:

$$\begin{cases} xy = -1, \\ xy = -1, \\ 0 = 0, \\ xy = -1. \end{cases}$$

Пришли, что переменные связаны соотношением: $xy = -1$ или $y = -\frac{1}{x}$. Это гипербола, лежащая во 2 и 4 четвертях. Сделаем чертеж: