Пример решения задачи по дискретной математике

Тема: Бинарные отношения

Дано множество $X=\{1,2,3,6\}$ *и отношение* $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in X, x - \text{делитель } y\}$. *Показать, что отношение R является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X, R). Существует ли в множестве X наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?*

Решение

Покажем, что отношение R рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Рефлексивность имеет место, так как любое число является своим делителем, т.е. $\forall x\in X \Rightarrow (x,x)\in R$.

Пусть одновременно выполняются условия: $(x,y)\in R$ и $(y,x)\in R$. Тогда $x=y$. Действительно, $(x,y)\in R$ означает, что x – делитель y, т.е. найдется целое число m такое, что $y=m\cdot x$. Одновременно найдется целое число n такое, что $x=n\cdot y$. Отсюда $y=m\cdot n\cdot y$ и $m\cdot n=1$.Последнее равенство выполняется при $m=n=1$ или $m=n=-1$.

Т.к. все элементы множества X – положительные числа, то второй случай невозможен. Следовательно, $m=n=1$, т.е. $x=y$, и отношение R антисимметрично.

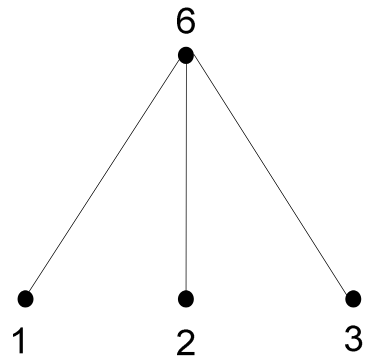
Пусть $(x,y)\in R$ и $(y,z)\in R$. Следовательно, найдутся $m,k\in Z$ такие, что $y=m\cdot x,\ \ z=k\cdot y$. Тогда $z=k\cdot(m\cdot x)=(k\cdot m)\cdot x=n\cdot x$, где $n=m\cdot k\in Z$. Значит, x является делителем z и $(x,z)\in R$. Отношение R является транзитивным.

Отношение R рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, т.е. является отношением порядка.

Построим диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X, R).

На нижнем (первом) уровне диаграммы поместим элементы $x \in X$, не имеющие других делителей, кроме себя ($x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$). На втором (верхнем) уровне – оставшийся элемент $x = 6$, не имеющие других делителей, кроме себя и элементов нижнего уровня. Соединяем отрезком элементы соседних уровней, если элемент нижнего уровня является делителем элемента соседнего верхнего уровня. Т.к. число 6 делится на все числа первого уровня, получаем 3 отрезка.

Диаграмма Хассе частично упорядоченного множества (X, R):



По диаграмме Хассе видим, что несравнимыми элементами являются только элементы первого уровня: 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3. Наибольшим элементом является элемент $w = 6$ (для всех $x \in X$ выполнено условие “x является делителем 6”).

Наименьшего элемента нет, но есть три минимальных: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ и $u_3 = 3$.