МИРЭА. Типовой расчет по теории вероятностей с решением

Вариант 1

Часть 2. Случайные величины

Задача 2.1. Фекла решила удивить своего бойфренда роскошным ужином и купила для этого в супермаркете пакет с картофелем. Картофель упаковывают по 14 штук в каждый пакет, причем 2 из них с темными пятнами внутри. Фекла чистит 5 картофелин на ужин. Найдите рад распределения случайной величины ξ числа испорченных картофелин среди очищенных, постройте график функции распределения, найдите $M\xi, D\xi$.

Решение. Пусть ξ - дискретная случайная величина, равная количеству испорченных картофелин среди 5 выбранных. Она может принимать целые значения от 0 до 4. Вероятности этих значений можно найти по формуле гипергеометрической вероятности:

$P(\xi=k)=\dfrac{C_2^k\cdot C_{12}^{5-k}}{C_{14}^5}$, $k=0,1,2$ - вероятность того, что будет выбрано k испорченных картофелин (из 2) и еще $5-k$ обычных (из 14-2=12).

Вычисляем вероятности по этой формуле.

$$P(\xi=0)=\frac{C_2^0\cdot C_{12}^5}{C_{14}^5}=\frac{36}{91},$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_2^1\cdot C_{12}^4}{C_{14}^5}=\frac{45}{91},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_2^2\cdot C_{12}^3}{C_{14}^5}=\frac{10}{91}.$$

Занесем в таблицу, получим закон распределения:

x_i	0	1	2
p_i	36/91	45/91	10/91

Сумма вероятностей равна 1, расчеты верные.

Найдем функцию распределения по определению $F(x) = P(\xi < x)$, то есть

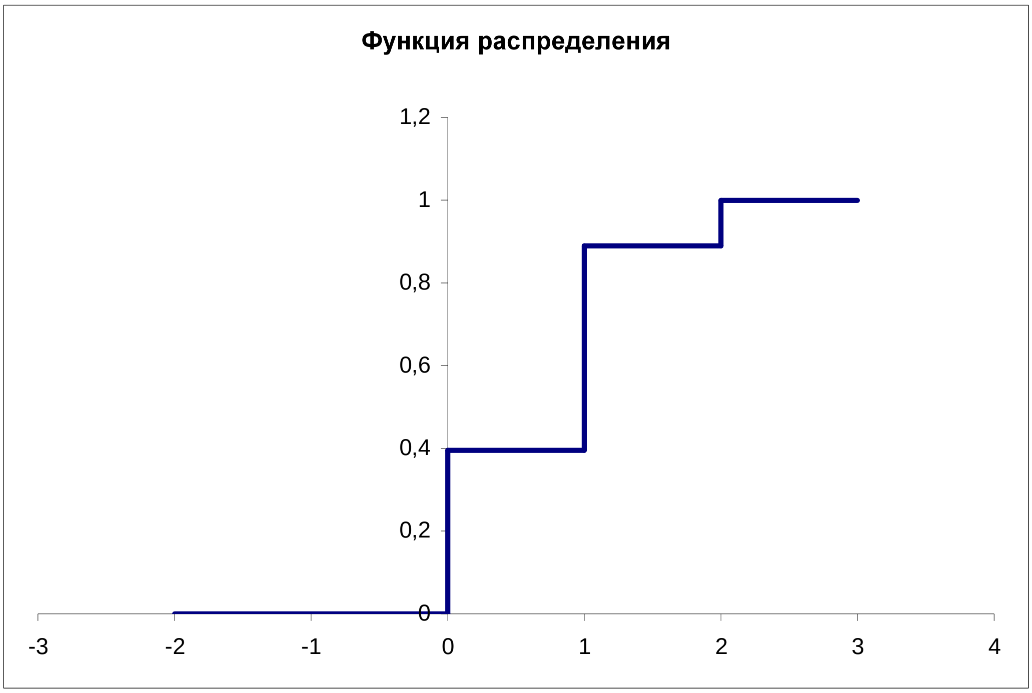
при x ≤ 0, F(x) = 0,

при 0< x ≤ 1, F(x) = 0+36/91 = 36/91,

при 1< x ≤ 2, F(x) = 36/91+45/91=81/91,

при x>2, F(x) = 81/91+10/91= 1.

Построим график:



Математическое ожидание

$$M\xi = \sum x_i p_i = 0 \cdot \frac{36}{91} + 1 \cdot \frac{45}{91} + 2 \cdot \frac{10}{91} = \frac{5}{7}.$$

Дисперсия:

$$D\xi = \sum x_i^2 p_i - (M\xi)^2 = 0 \cdot \frac{36}{91} + 1 \cdot \frac{45}{91} + 4 \cdot \frac{10}{91} - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{270}{637}.$$

Задача 2.2. Устройство содержит некоторое количество одинаково надежных элементов, которые могу отказывать независимо друг от друга с одинаковой вероятностью. ξ - случайная величина – число отказавших элементов.

А) Число элементов $N1=8$, вероятность отказа каждого элемента - $p1=0,35$. Составить ряд распределения случайной величины ξ (в общем виде). Найти математическое ожидание ξ, дисперсию ξ. Какова вероятность того, что откажет более 2-х элементов?

Решение. Случайная величина ξ – число отказавших элементов распределена по биномиальному закону с параметрами $n=8, p=0,35$. ξ может принимать значения {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, причем соответствующие вероятности можно вычислить по формуле Бернулли:

$$P(\xi=k)=P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_8^k \cdot 0,35^k \cdot 0,65^{8-k}.$$

Так как ξ распределено по биномиальному закону, воспользуемся соответствующими формулами для вычисления характеристик случайной величины ξ.

Математическое ожидание $M\xi = n\cdot p = 8\cdot 0,35 = 2,8$.

Дисперсия $D\xi = n\cdot p\cdot(1-p) = 8\cdot 0,35\cdot 0,65 = 1,82$

Найдем вероятность того, что откажет более 2-х элементов:

$$P(\xi>2)=1-P(\xi\le 2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)-P(\xi=2)=$$
$$=1-C_8^0\cdot 0,35^0\cdot 0,65^{8-0}-C_8^1\cdot 0,35^1\cdot 0,65^{8-1}-C_8^2\cdot 0,35^2\cdot 0,65^{8-2}=$$
$$=1-0,65^8-8\cdot 0,35\cdot 0,65^7-\frac{7\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot 0,35^2\cdot 0,65^6\approx 0,572.$$

Б) Число элементов $N2=600$, вероятность отказа $p2=0,001$. Найти математическое ожидание ξ, дисперсию ξ. Какова вероятность того, что откажет хотя бы один элемент?

Решение. Случайная величина ξ – число отказавших элементов распределена по биномиальному закону с параметрами $n=600, p=0,001$. ξ может принимать целые значения от 0 до 600, причем соответствующие вероятности можно вычислить по точной формуле Бернулли: $P(\xi = k) = P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_{600}^k \cdot 0,001^k \cdot 0,999^{600-k}$.

Но, так как n велико, а p мало, можно использовать для вычислений приближенную формулу Пуассона: $P_n(k) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$, где $np = 600 \cdot 0,001 = 0,6$, откуда получаем искомую формулу $P(\xi = k) = \frac{0,6^k}{k!} e^{-0,6}$.

Так как ξ распределено по биномиальному закону, воспользуемся соответствующими формулами для вычисления характеристик случайной величины ξ.

Математическое ожидание $M\xi = n \cdot p = 600 \cdot 0,001 = 0,6$.

Дисперсия $D\xi = n \cdot p \cdot (1-p) = 600 \cdot 0,001 \cdot 0,999 = 0,5994$

Найдем вероятность того, что откажет хотя бы один элемент:

$$P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi < 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - \frac{0,6^0}{0!} e^{-0,6} = 1 - e^{-0,6} \approx 0,451.$$

Задача 2.3. В урне находятся белые и черные шары. Из урны извлекается шар, фиксируется его цвет и шар возвращается в урну. Шар извлекается до первого появления события A (число извлечений неограниченно).

Событие A - появление черного шара. В урне 4 белых и 6 черных шаров.

Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ - числа извлеченных шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ. Найти вероятность того, что извлекалось более четырех шаров.

Решение. Пусть ξ - дискретная случайная величина, равная числу извлеченных шаров. Так как число шаров неограниченно и шар каждый раз возвращается в урну, ξ может принимать целые значения 1, 2, 3, …

Величина ξ распределена по геометрическому закону распределения, вероятности $P(\xi = k) = p^{k-1} \cdot q = 0,4^{k-1} \cdot 0,6$ (первые $k-1$ извлечений был вынут белый шар с вероятностью $\frac{4}{6+4} = 0,4$ в каждом извлечении, в последнем k извлечении был вынут черный шар с вероятностью $\frac{6}{6+4} = 0,6$).

Получаем ряд распределения:

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	0,6	0,24	0,096	…	$0,4^{k-1} \cdot 0,6$	…

Тогда математическое ожидание

$$M\xi = \sum x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} q \cdot k = q \sum_{k=1}^{\infty} k p^{k-1} = q \sum_{k=1}^{\infty} \left(p^k\right)' =$$

$$= q\left(\sum_{k=1}^{\infty} p^k\right)' = q\left(\frac{p}{1-p}\right)' = q\frac{1(1-p) - p(-1)}{(1-p)^2} = q\frac{1}{q^2} = \frac{1}{q}.$$

Для нашего случая $M\xi = \frac{1}{0,6} = \frac{10}{6} = 1,667.$

Аналогично найдем $M\left(\xi^2\right)=\sum\left(x_k\right)^2 p_k=\sum_{k=0}^{\infty} p^{k-1}\cdot q\cdot k^2=\frac{(p+1)}{q^2}$.

Тогда дисперсия

$D\xi=M\left(\xi^2\right)-(M\xi)^2=\frac{(p+1)}{q^2}-\frac{1}{q^2}=\frac{p}{q^2}$ или $D\xi=\frac{0,4}{0,6^2}=1{,}111$.

Найти вероятность того, что извлекалось более четырех шаров:

$$P(\xi>4)=1-P(\xi\le 4)=1-P(\xi=1)-P(\xi=2)-P(\xi=3)-P(\xi=4)=$$
$$=1-0,6-0,24-0,096-0,4^3\cdot 0,6=0,0256.$$

Задача 2.4. Дана функция распределения непрерывной случайной величины $F(x)$. Найти плотность распределения $f(x)$, параметр A, вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал (α,β), математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

11. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ A(6x-x^2), & x\in(0;3]\\ 1, & x>3\end{cases}\qquad \alpha=0,\quad \beta=1$$

Решение.

Найдем параметр А из условия $F(3)=A(18-9)=9A=1,\ A=\frac{1}{9}$.

Получаем:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x\le 0; \\ \frac{1}{9}(6x-x^2), 0<x\le 3; \\ 1, x>3. \end{cases}$$

Найдем плотность вероятности по определению:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x\le 0; \\ \frac{1}{9}(6-2x), 0<x\le 3; \\ 0, x>3. \end{cases}$$

Найдем вероятность:

$$P(0<X<1)=F(1)-F(0)=\frac{1}{9}(6-1)-0=\frac{5}{9}\approx 0,556.$$

Математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx=\frac{1}{9}\int_0^3(6-2x)xdx=\frac{1}{9}\int_0^3\left(6x-2x^2\right)dx=\frac{1}{9}\left(3x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3=$$
$$=\frac{1}{9}\left[3\cdot 3^2-\frac{2}{3}3^3\right]=1.$$

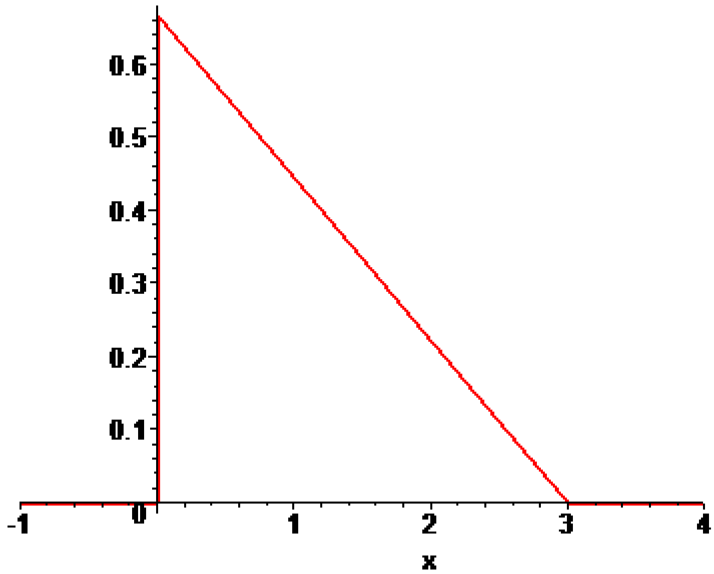
Дисперсия:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2dx-\left(M(X)\right)^2=\frac{1}{9}\int_0^3(6-2x)x^2dx-1=\frac{1}{9}\int_0^3\left(6x^2-2x^3\right)dx-1=$$

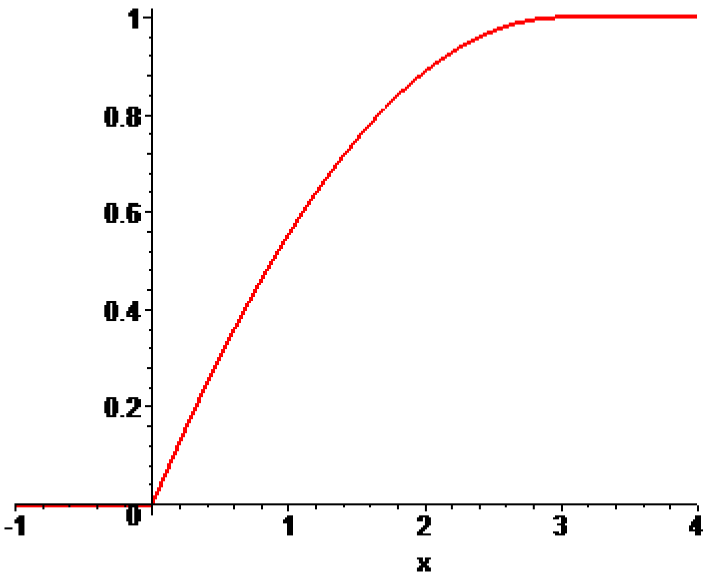
$$=\frac{1}{9}\left(2x^3-\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^3-1=\frac{1}{9}\left[2\cdot 3^3-\frac{1}{2}3^4\right]-1=\frac{1}{2}.$$

Строим графики.

Плотность распределения:



Функция распределения:



Задача 2.5. Непрерывная случайная величина распределена равномерно на отрезке [1;A]. Математическое ожидание равно 5,5.

Найти параметр распределения A, функцию распределения, плотность распределения , построить графики функции распределения и плотности распределения случайной величины.

Найти дисперсию случайной величины и вероятность попадания в интервал (3; 17).

Решение. Найдем параметр распределения A из условия

$$MX = \frac{A+1}{2} = 5,5,$$
$$A+1=11,$$
$$A=10.$$

Получаем, что X распределена равномерно на интервале $(a,b)=(1,\,10)$.

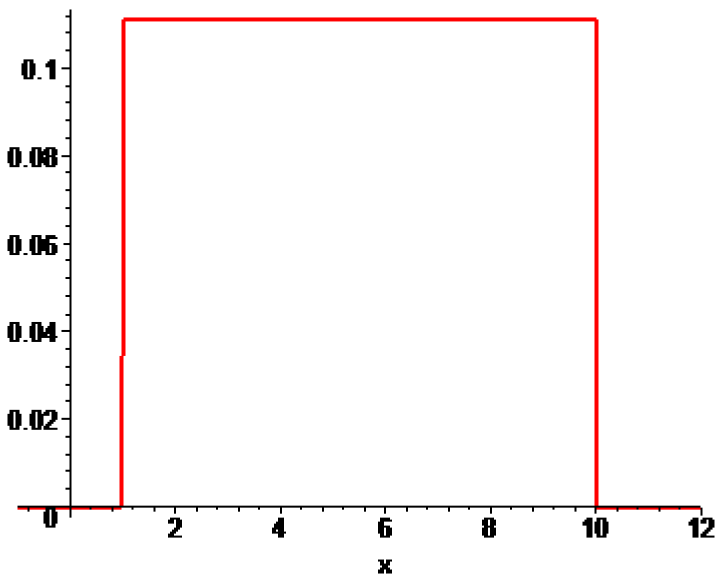
Плотность распределения:

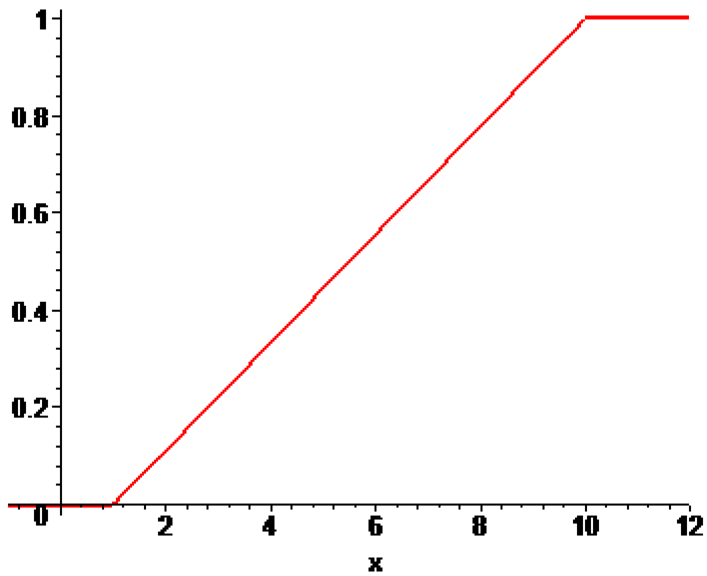
$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 0, & x>b. \end{cases} \quad\Rightarrow\qquad f(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ \dfrac{1}{9}, & 1\le x\le 10, \\ 0, & x>10. \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b. \end{cases} \quad\Rightarrow\qquad F(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ \dfrac{x-1}{9}, & 1\le x\le 10, \\ 1, & x>10. \end{cases}$$

Графики функций:





Дисперсия $DX = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(10-1)^2}{12} = \frac{81}{12} = \frac{27}{4}$

Найдем вероятность попадания в интервал $(\alpha, \beta) = (3;17)$.

$$P(3 < X < 17) = F(17) - F(3) = 1 - \frac{3-1}{9} = \frac{7}{9} \approx 0,778.$$

Задача 2.6. Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром λ=11. Найти плотность распределения случайной величины ξ, функцию распределения, построить графики этих функций. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ и вероятность того, что ξ принимает значения, меньшие своего математического ожидания.

Решение. По условию непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 11$.

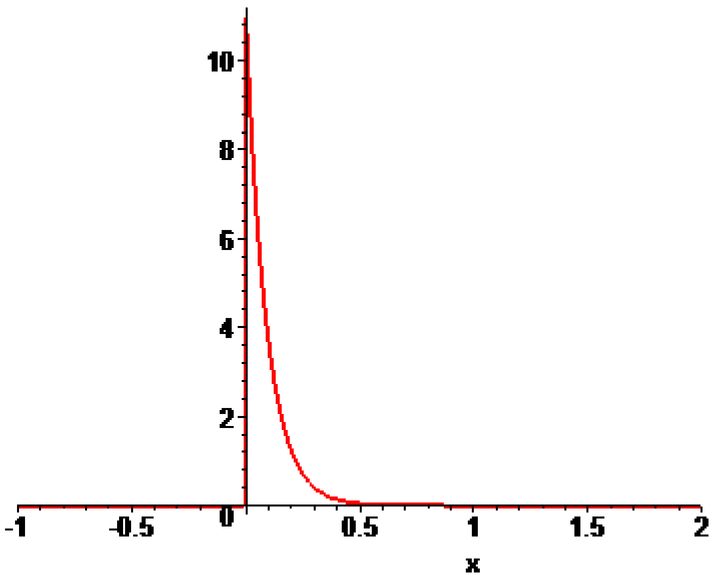
Тогда плотность вероятности имеет вид:

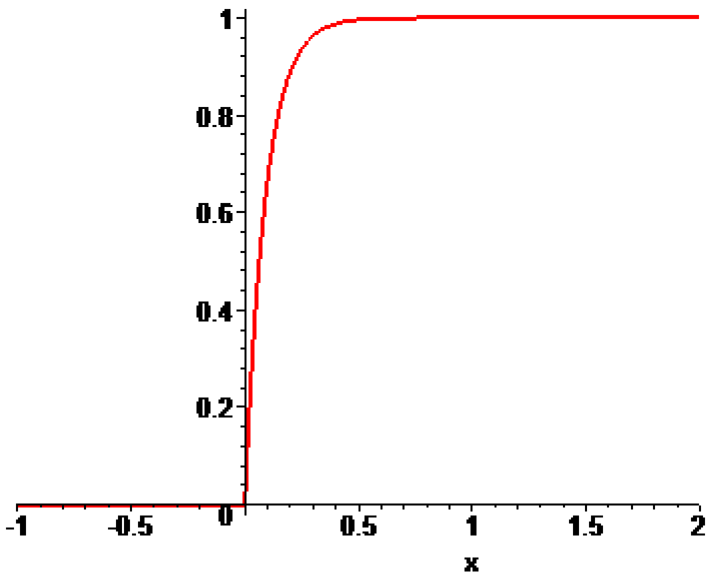
$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ 11e^{-11x}, \ x \geq 0. \end{cases}$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ 1 - e^{-11x}, \ x \geq 0. \end{cases}$$

Построим графики функций.





Найдем математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

$$a = M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx = \int_{0}^{\infty} 11xe^{-11x}\,dx = \left[-xe^{-11x} - \frac{1}{11}e^{-11x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{11}.$$

Дисперсия

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2dx - (M(\xi))^2 = \int_{0}^{\infty} 11e^{-2x}x^2dx - \left(\frac{1}{11}\right)^2 = \left[-x^2e^{-2x} - \frac{2x}{11}e^{-11x} - \frac{2}{11^2}e^{-11x}\right]_0^{\infty} - \frac{1}{121} =$$
$$= \frac{2}{121} - \frac{1}{121} = \frac{1}{121}.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ: $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{\frac{1}{121}} = \frac{1}{11}.$

Найдем вероятность того, что ξ принимает значения, меньшие своего математического ожидания.

$$P(0<\xi<1/11)=F(1/11)-F(0)=(1-e^{-11/11})-(1-e^{0})=1-e^{-1}=0,632.$$

Задача 2.7. Автомат по нарезанию гвоздей длиной 80 мм в нормальном режиме имеет случайную ошибку, распределенную по нормальному закону. Систематическая ошибка отсутствует, средняя квадратическая ошибка равна 0,5 мм. В каком интервале с вероятностью 0,999 будет находиться длина гвоздя?

Решение. Будем использовать формулу: $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$ - нормированная функция Лапласа (значения берутся из таблицы). По условию также известно, что $\sigma=0,5$, $P=0,999$, $a=0$, отклонение от номинала $\delta=?$.

Найдем отклонение δ:

$$P(|X-0|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{0,5}\right)=0,999,$$
$$\Phi\left(\frac{\delta}{0,5}\right)=0,4995,$$
$$\frac{\delta}{0,5}=3,291,$$
$$\delta=1,6455.$$

Тогда с вероятностью 0,999 длина гвоздя будет находиться в интервале от $(80-1,6455)=78,3545$ мм до $(80+1,6455)=81,6455$ мм.

Ответ: от 78,3545 до 81,6455 мм.

Задача 2.8. Устройство состоит из 80 элементов с одинаковой надежностью 0,8 (надежность элемента – вероятность его работы за время t). Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что:

1) за время t выйдет из строя от 10 до 20 элементов;
2) относительная частота выхода из строя элементов будет отклоняться от вероятности этого события менее чем на 0,1 (по абсолютной величине).

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами $n=80$ (количество элементов), $p=0,2$ (вероятность выхода элемента из строя), $q=1-p=0,8$.

Найдем вероятность того, что за время t выйдет из строя от 10 до 20 элементов. Используем интегральную теорему Лапласа:

$P_n(m_1,m_2)\approx\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $m_1=10$, $m_2=20$, $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$ – функция Лапласа (значения берутся из таблиц). Подставляем:

$$P_{80}(10,20)\approx\Phi\left(\frac{20-80\cdot 0,2}{\sqrt{80\cdot 0,2\cdot 0,8}}\right)-\Phi\left(\frac{10-80\cdot 0,2}{\sqrt{80\cdot 0,2\cdot 0,8}}\right)=$$

$$=\Phi(1,12)-\Phi(-1,68)=\Phi(1,12)+\Phi(1,68)=0,3682+0,4532=0,8215.$$

Найдем вероятность того, что относительная частота выхода из строя элементов будет отклоняться от вероятности этого события менее чем на 0,1 (по абсолютной величине).

Используем формулу: $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

Получаем:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0,2\right|\leq 0,1\right)\approx 2\Phi\left(0,1\sqrt{\frac{80}{0,2\cdot 0,8}}\right)=2\Phi\left(2,236\right)=2\cdot 0,487=0,975.$$

Ответ: 0,8215; 0,975.