Решение билета по высшей математике (МАИ)

Вариант 104.

Задача 1.

Найти целочисленное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - x_4 - 4x_5 = -12 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 2x_5 = -11 \end{cases}$$

Найти целочисленное решение соответствующей однородной системы линейных алгебраических уравнений и укажите ее фундаментальную системы решений, если это возможно.

Решение

Запишем расширенную матрицу системы, перобразуем ее

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & -5 & -1 & -4 & -12 \\ 3 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -6 & -2 & -2 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & -5 & -1 & -4 & -12 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 14 & 36 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 16 & 38 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & -5 & -1 & -4 & -12 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 14 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & -5 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ранг матрицы равен трем, переменных пять, свободных переменных две.

Выразим переменные x_1, x_4, x_5 через переменные x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 2x_2 - 4x_3 \\ x_4 = 22 - 8x_2 - 13x_3 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Положим $x_2 = 1, x_3 = 0,$ получим

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 2 - 0 = 5 \\ x_4 = 22 - 8 - 0 = 14 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Положим $x_2 = 0, x_3 = 1,$ получим

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 0 - 4 = 3 \\ x_4 = 22 - 0 - 13 = 9 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 = C_1\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Запишем соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Запишем матрицу системы и преобразуем ее

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & -6 & -6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & -1 & -4 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 14 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 16 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & -1 & -4 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы равен трем, переменных пять, свободных переменных две.

Выразим переменные x_1, x_4, x_5 через переменные x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_3 \\ x_4 = -8x_2 - 13x_3 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Положим $x_2 = 1, x_3 = 0,$ получим

$$\begin{cases} x_1 = -2 - 0 = -2 \\ x_4 = -8 - 0 = -8 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Положим $x_2 = 0, x_3 = 1,$ получим

$$\begin{cases} x_1 = -0 - 4 = -4 \\ x_4 = -0 - 13 = -13 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Общее решение

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 = C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Столбцы X_1, X_2 составляют фундаментальную систему решений.

Ответ. Общее решение неоднородной системы

$$X = C_1\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \text{ - целые}$$

Фундаментальная система решений однородной системы

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Общее решение однородной системы

$$X = C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \text{ - целые}$$

Задача 2.

Найдите x из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 8 \\ -1 & -1 & 4 & -6 \\ -2/3 & 3 & x & -5 \\ -2/3 & -1/2 & 5/2 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

Решение.

Разложим определитель по элементам третьей строки. Уравнение примет вид:

$$-\frac{2}{3}\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -5 & 8 \\ -1 & 4 & -6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -1 & 4 & -6 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+x\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & -6 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -3 \end{vmatrix} - 5\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = -3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 8 \\ -1 & 4 & -6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} = 0-20-15-(-16+0-15) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -1 & 4 & -6 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} = -12-20-20-\left(-\frac{64}{3}-15-15\right) = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & -6 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -3 \end{vmatrix} = 3+4+0-\left(\frac{16}{3}+3+0\right) = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = -\frac{5}{2}-\frac{5}{2}+0-\left(-\frac{10}{3}-2+0\right) = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{2}{3}\cdot(-4) - 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + x\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 5\cdot\frac{1}{3} = -3$$

$$\frac{8}{3}+2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}=-3$$

$$x=7$$

Ответ. $x=7$.

Задача 3.

Решите матричное уравнение.

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & 10\\ 7 & 6\end{pmatrix}$$

Решение.

$$X=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & 10\\ 7 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}^{-1}$$

Найдем матрицу $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=12+0-1-(0+0+0)=11$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=6; A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1; A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2; A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4; A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1; A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2; A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

Найдем $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$$

$$A_{11} = 4; A_{12} = -1; A_{21} = 3; A_{22} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

Уравнение примет вид

$$X = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24-6-7}{11} & \frac{30+20-6}{11} \\ \frac{4-12-14}{11} & \frac{5+40-12}{11} \\ \frac{-12+3+42}{11} & \frac{-15-10+36}{11} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{4}{11} & \frac{3}{11}\\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4-4}{11} & \frac{3+8}{11}\\ \frac{-8-3}{11} & \frac{-6+6}{11}\\ \frac{12-1}{11} & \frac{9+2}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Ответ. $X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Задача 5.

Образуют ли линейное пространство матрицы, перестановочные с матрицей

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Если да, укажите размерность этого пространства и его базис.

Решение.

Запишем матрицу, перестановочную с A, в общем виде.

$$B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

Из того, что матрица B - перестановочная с A:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2a+c & 2b+d\\ a-c & b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+b & a-b\\ 2c+d & c-d\end{pmatrix}$$

Две матрицы равны тогда, когда равны их соответствующие элементы. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases}2a+c=2a+b\\ 2b+d=a-b\\ a-c=2c+d\\ b-d=c-d\end{cases}$$

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ a - 3b - d = 0 \\ a - 3c - d = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ a - 3c - d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = c \\ a = 3c + d \end{cases}$$

Итак, матрицы перестановочные с A, имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 3c + d & c \\ c & d \end{pmatrix}$$

Множество L образует линейное пространство, если для любых двух его элементов x, y определены операции сложения $x + y \in L$ и умножения на действительное число $a \in R; ax \in L$ со свойствами:

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. существует нулевой элемент $0 \in L$: $a + 0 = a$
4. для любого элемента $x \in L$ существует элемент $y \in L$: $x + y = 0$
   В данном случае $y = -1 \cdot x$

Для любых $x, y \in L$ и любых действительных чисел a, b

5. $1 \cdot x = x$
6. $a(bx) = (ab)x$
7. $(a + b)x = ax + bx$
8. $a(x + y) = ax + ay$

Очевидно, все эти свойства выполняются для матриц указанного вида.

Матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, образуют линейное пространство.

Матрицы вида $\begin{pmatrix} 3c+d & c \\ c & d \end{pmatrix}$ зависят от двух параметров, то есть размерность линейного пространства, образованного такими матрицами, равна 2.

Положив $c = 1, d = 0,$ получим матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Положив $c = 0, d = 1,$ получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Очевидно, эти матрицы линейно независимы. Так как размерность указанного линейного пространства равна 2, любые две линейно независимые матрицы образуют базис.

Базис указанного линейного пространства: $\left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Ответ.

Матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, образуют линейное пространство размерности 2, базис : $\left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$