Задача 1. Найти неопределенный интеграл

А) $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sqrt{\cos x}}$

Решение.

$$\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sqrt{\cos x}} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{\cos x}} = \int \frac{\sin x dx}{(\cos x)^{3/2}} =$$

Делаем замену $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$. Получим:

$$= -\int \frac{dt}{t^{3/2}} = -\int t^{-3/2} dt = -\frac{t^{-3/2+1}}{-3/2+1} + C = -\frac{t^{-1/2}}{-1/2} + C = 2t^{-1/2} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{t}} + C = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$$

Б) $\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2+1)} dx$

Решение.

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{x^3 + x + 1}{x^3 + x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^3 + x}\right) dx = \int dx + \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx =$$

Разложим подынтегральное выражение на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1},$$

$$1 = A(x^2+1) + (Bx + C)x,$$

$$1 = A(x^2+1) + Bx^2 + Cx.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ C = 0, \\ A = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -1, \\ C = 0, \\ A = 1. \end{cases}$$

Получили: $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$.

Интегрируем:

$$=\int dx+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=x+\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{xdx}{x^2+1}=x+\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=$$

$$=x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C.$$

Задача 2. Найти экстремум функции двух переменных
$z=e^{-y/2}\left(x^2-y\right)$.

Решение. Найдем стационарные точки функции. Вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} z'_x=\left(e^{-y/2}\left(x^2-y\right)\right)'_x=e^{-y/2}\cdot 2x=0, \\ z'_y=\left(e^{-y/2}\left(x^2-y\right)\right)'_y=-\frac{1}{2}e^{-y/2}\left(x^2-y\right)+e^{-y/2}(-1)=-\frac{1}{2}e^{-y/2}\left(x^2-y+2\right)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{-y/2}\cdot 2x=0, \\ -\frac{1}{2}e^{-y/2}\left(x^2-y+2\right)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0, \\ x^2-y+2=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0, \\ y=2. \end{cases}$$

Получили стационарную точку $M(0;2)$. Исследуем ее на экстремум.

Найдем определитель вторых производных: $\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}$.

Вычисляем:

$$z''_{xx}=\left(e^{-y/2}\cdot 2x\right)'_x=2e^{-y/2}.$$

$$z''_{yy}=\left(-\frac{1}{2}e^{-y/2}\left(x^2-y+2\right)\right)'_y=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-y/2}\left(x^2-y+2\right)-\frac{1}{2}e^{-y/2}(-1)=$$

$$=e^{-y/2}\left[\frac{1}{4}\left(x^2-y+2\right)+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}e^{-y/2}\left[x^2-y+4\right].$$

$$z'_{xy}=\left(e^{-y/2}\cdot 2x\right)'_y=-\frac{1}{2}e^{-y/2}\cdot 2x=-xe^{-y/2}.$$

Тогда в точке $M(0;2)$:

$z''_{xx}(0;2)=2e^{-1}.$

$z''_{yy}(0;2)=\frac{1}{4}e^{-1}[0-2+4]=\frac{1}{2}e^{-1}.$

$z'_{xy}(0;2)=0.$

Подставляем в определитель вторых производных:

$$\Delta(0;2)=\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}(0;2)=\begin{vmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-1} \end{vmatrix}=e^{-2}>0.$$

В точке $M(0;2)$ есть экстремум, это минимум, так как $z''_{xx}(0;2)=2e^{-1}>0$.

$z_{\min}=z(0;2)=-2e^{-1}.$

Задача 3. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 xe^x dx$$

Решение. Интегрируем по частям:

$$\int_0^1 xe^x dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{vmatrix}=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=1e^1-e^x\Big|_0^1=$$

$$=e-\left(e^1-e^0\right)=e-e+1=1.$$

Задача 4. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+2x)}$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+2x)}=\left(\frac{1-1}{\ln 1}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Используем правило Лопиталя, дифференцируем числитель и знаменатель:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(\ln(1+2x)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\frac{2}{1+2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)e^x}{2}=\frac{(1+0)e^0}{2}=\frac{1}{2}.$$