

Задание с решением по численным методам

Применить аппроксимацию Паде для приближения функции $f(x) = x^2 e^{1-x}$ рациональной дробью $[2/2]$.

РЕШЕНИЕ

В общем виде аппроксимация Паде $[2/2]$ записывается так:

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x + b_2 x^2}.$$

Требуется найти коэффициенты a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 .

1) Разложим функцию $f(x)$ в ряд (в точке $x_0 = 0$), количество членов ряда равно $2+2+1=5$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{IV}(0)x^4}{4!} + O(x^5).$$

Вычислим производные функции $f(x)$ в нуле:

$$f(0) = 0;$$

$$f'(x) = (x^2 e^{1-x})' = 2x e^{1-x} - x^2 e^{1-x}; \quad f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = (2x e^{1-x} - x^2 e^{1-x})' = ((2x - x^2) e^{1-x})' = (2 - 2x) e^{1-x} - (2x - x^2) e^{1-x} = (2 - 4x + x^2) e^{1-x}; \quad f''(0) = 2e;$$

$$f'''(x) = ((2 - 4x + x^2) e^{1-x})' = (-4 + 2x) e^{1-x} - (2 - 4x + x^2) e^{1-x} = (-6 + 6x - x^2) e^{1-x}; \quad f'''(0) = -6e;$$

$$f^{IV}(x) = ((-6 + 6x - x^2) e^{1-x})' = (6 - 2x) e^{1-x} - (-6 + 6x - x^2) e^{1-x} = (12 - 8x + x^2) e^{1-x}; \quad f^{IV}(0) = 12e;$$

Тогда

$$f(x) = e \cdot x^2 - e \cdot x^3 + \frac{1}{2} e \cdot x^4 + O(x^5).$$

2) Запишем рациональную дробь (аппроксимацию Паде) в общем виде и приравняем ее разложению в ряд:

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x + b_2 x^2} = e \cdot x^2 - e \cdot x^3 + \frac{1}{2} e \cdot x^4.$$

3) Умножим правую часть на знаменатель:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = (e \cdot x^2 - e \cdot x^3 + \frac{1}{2} e \cdot x^4)(1 + b_1 x + b_2 x^2).$$

Откроем скобки

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = e \cdot x^2 - e \cdot x^3 + \frac{1}{2} e \cdot x^4 + b_1 e \cdot x^3 - b_1 e \cdot x^4 + \frac{b_1}{2} e \cdot x^5 + b_2 e \cdot x^4 - b_2 e \cdot x^5 + \frac{b_2}{2} e \cdot x^6.$$

Приведем подобные слагаемые:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = e \cdot x^2 + (-e + b_1 e) \cdot x^3 + \left(\frac{1}{2} e - b_1 e + b_2 e \right) \cdot x^4 + \underbrace{\left(\frac{b_1}{2} e - b_2 e \right) \cdot x^5 + \frac{b_2}{2} e \cdot x^6}_{\text{НЕ УЧИТЫВАЮТСЯ}}.$$

4) Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях "x". Запишем систему уравнений и решим ее:

Работа по численным методам выполнена на сайте www.matburo.ru
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = e \end{cases}$$
$$\begin{cases} -e + b_1 e = 0 \\ \frac{1}{2}e - b_1 e + b_2 e = 0 \end{cases}$$

Из второй системы получаем:

$$\begin{cases} b_1 e = e \\ b_2 e = b_1 e - \frac{1}{2}e \end{cases} \quad \text{Тогда } b_1 = 1; b_2 = \frac{1}{2}e.$$

Подставим найденные коэффициенты в общий вид аппроксимации Паде:

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x + b_2 x^2} = \frac{e \cdot x^2}{1 + x + \frac{1}{2}e \cdot x^2} = \frac{2e \cdot x^2}{2 + 2 + e \cdot x^2}.$$

ОТВЕТ: $\frac{2e \cdot x^2}{2 + 2 + e \cdot x^2}$