Расчетно-графическая работа по математике

Интегралы

Вариант 2

Вариант 47

Задания 1-6. Найти неопределенные интегралы:

Сделать проверку дифференцированием в трех из шести задач.

1) $\int \frac{x^2}{\left(x^3+2\right)^3}dx$

Решение.

Применяем метод подстановки: $t = x^3+2,\ dt = 3x^2dx,\ \frac{1}{3}dt = x^2dx$.

$$\int \frac{x^2}{\left(x^3+2\right)^3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{-2t^2}+C = -\frac{1}{6t^2}+C = -\frac{1}{6\left(x^3+2\right)^2}+C.$$

Делаем проверку. Получаем, что $f(x) = \frac{x^2}{\left(x^3+2\right)^3}$, $F(x) = -\frac{1}{6\left(x^3+2\right)^2}+C$.

$$F'(x) = \left(-\frac{1}{6\left(x^3+2\right)^2}+C\right)' = -\frac{1}{6}(-2)\frac{1}{\left(x^3+2\right)^3}\left(x^3+2\right)'+0 = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(x^3+2\right)^3}\left(3x^2\right) =$$

$$= \frac{x^2}{\left(x^3+2\right)^3} = f(x).$$

Верно.

2) $\int (5x+6)\cos 2x dx$

Решение. Интегрируем по частям:

$$\int (5x+6)\cos 2x dx = \left| \begin{matrix} u = 5x+6 & du = 5dx \\ dv = \cos 2x dx & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\sin 2x(5x+6) - \frac{5}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x(5x+6) + \frac{5}{4}\cos 2x + C.$$

Делаем проверку. Получаем, что $f(x) = (5x+6)\cos 2x$, $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x(5x+6) + \frac{5}{4}\cos 2x + C$.

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2}\sin 2x(5x+6) + \frac{5}{4}\cos 2x + C\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x \cdot 5 + \frac{1}{2}2\cos 2x(5x+6) + \frac{5}{4}(-2)\sin 2x + 0 =$$

$$= \frac{5}{2}\sin 2x + \cos 2x(5x+6) - \frac{5}{2}\sin 2x = (5x+6)\cos 2x = f(x).$$

Верно.

3) $\int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx$

Решение. Выделим целую часть дроби:

$$\begin{array}{l|l} 2x^5 - 8x^3 + 3 & x^2 - 2x \\ \cline{2-2} \underline{2x^5 - 4x^4} & 2x^3 + 4x^2 - 4x - 8 \\ 4x^4 - 8x^3 & \\ \underline{4x^4 - 8x^3} & \\ 3. & \end{array}$$

Получаем:

$$\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx=\int\left(2x^3+4x^2\right)dx+\int\frac{3}{x^2-2x}dx=$$

Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{3}{x^2-2x}=\frac{3}{x(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2},$$

$$3=A(x-2)+Bx.$$

Пусть $x=2$, тогда $3=2B,\ B=3/2$.

Пусть $x=0$, тогда $3=-2A,\ A=-3/2$.

Получаем $\frac{3}{x^2-2x}=\frac{3}{x(x-2)}=-\frac{3}{2}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x-2}$

Возвращаемся к интегралу:

$$=\int\left(2x^3+4x^2\right)dx+\int\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x-2}\right)dx=\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C.$$

Делаем проверку. Получаем, что $f(x)=\frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}$,

$$F(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C.$$

$$F'(x)=\left(\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C\right)'=$$
$$=2x^3+4x^2-\frac{3}{2}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x-2}=2x^3+4x^2+\frac{3}{x^2-2x}=$$
$$=\frac{2x^5-4x^4+4x^4-8x^3+3}{x^2-2x}=\frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}=f(x).$$

Верно.

4) $\int \sin^4\frac{x}{8}dx$

Решение. Используем для преобразования тригонометрические формулы:

$$\int \sin^4\frac{x}{8}dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{8}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-8\sin\frac{x}{4}+\sin\frac{x}{2}\right)+C=\frac{3}{8}x-2\sin\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}+C.$$

5) $\int \cos^7 xdx$

Решение.

$$\int\cos^7 xdx=\int\cos^6 x\cos xdx=\int\left(\cos^2 x\right)^3\cos xdx=\int\left(1-\sin^2 x\right)^3d\left(\sin x\right)=\left|\sin x=t\right|=$$
$$=\int\left(1-t^2\right)^3dt=\int\left(1-3t^2+3t^4-t^6\right)dt=t-t^3+\frac{3}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+C=\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$$

6) $\int \frac{dx}{(5-x)\sqrt{x+1}}$

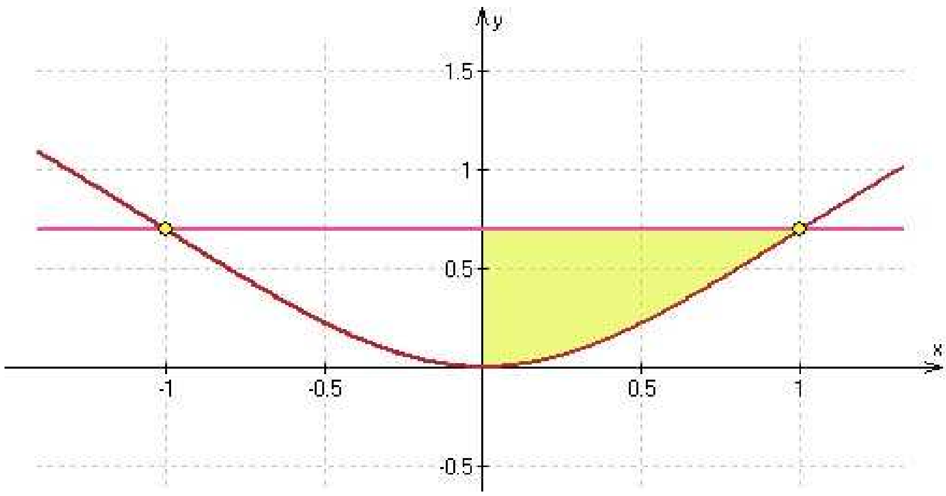
Решение. Делаем подстановку, чтобы избавиться от иррациональности:

$t=\sqrt{x+1}, x=t^2-1, dx=2tdt$.

$$\int \frac{dx}{(5-x)\sqrt{x+1}}=\int \frac{2tdt}{\left(5-t^2+1\right)t}=2\int \frac{dt}{\left(6-t^2\right)}=\frac{2}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}\right|+C.$$

Задание 7. На координатной плоскости XOY построить область, ограниченную линиями $y=\ln\left(x^2+1\right)$, $y=\ln 2,\ x=0$ и найти ее площадь.

Решение. Делаем чертеж:



Площадь области:

$$S=\int_0^1\left(\ln 2-\ln\left(x^2+1\right)\right)dx=\ln 2\int_0^1 dx-\int_0^1\ln\left(x^2+1\right)dx=\ln 2-\int_0^1\ln\left(x^2+1\right)dx=$$

Найдем отдельно интеграл

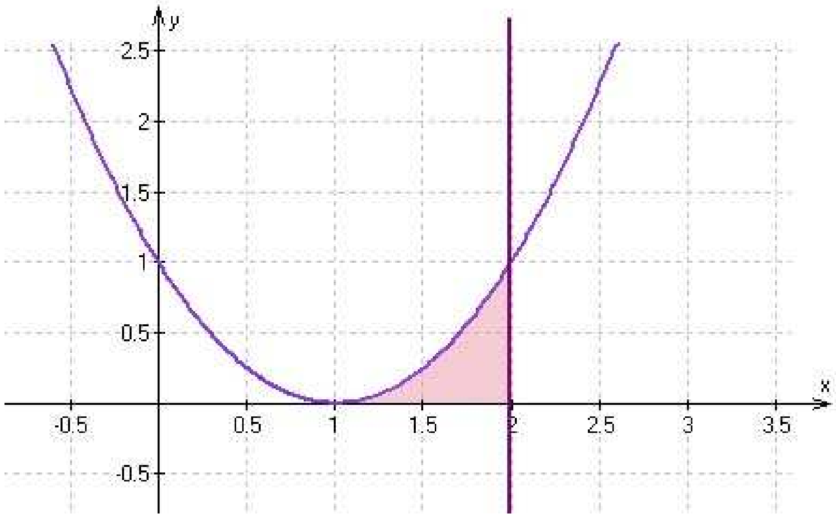
$$\int_0^1\ln\left(x^2+1\right)dx=\left|\begin{matrix}u=\ln\left(x^2+1\right) & du=\dfrac{2xdx}{x^2+1}\\ dv=dx & v=x\end{matrix}\right|=x\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2x^2dx}{x^2+1}=\ln 2-2\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=$$

$$=\ln 2-2\int_0^1 1dx+2\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\ln 2-2x\Big|_0^1+2\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\ln 2-2+2\operatorname{arctg}1=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}.$$

Получаем окончательно: $S=\ln 2-\left(\ln 2-2+\dfrac{\pi}{2}\right)=2-\dfrac{\pi}{2}.$

Задание 8. На координатной плоскости XOY построить площадь, ограниченную линиями $y = x^2 - 2x + 1$, $x = 2$, $y = 0$, и найти объем тела, образованного вращением этой площади вокруг оси OY.

Решение. Сделаем чертеж площади:



Запишем уравнение линии $y = x^2 - 2x + 1$ в виде:

$$y = x^2 - 2x + 1,$$
$$y = (x-1)^2,$$
$$x = \sqrt{y} + 1.$$

Тогда объем тела равен

$$V_{OY} = \pi\int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right)dy = \pi\int_0^1 \left(2^2 - \left(\sqrt{y}+1\right)^2\right)dy = \pi\int_0^1 \left(4 - y - 2\sqrt{y} - 1\right)dy = \pi\int_0^1 \left(3 - y - 2\sqrt{y}\right)dy =$$
$$= \pi\left(3y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{4}{3}\sqrt{y^3}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(3 - \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{6}\pi.$$