Расчетно-графическая работа

Уравнения в частных производных

Задача 1. Решить задачу Коши для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x).$$

3. $f(x) = 3^x, \quad \varphi(x) = \sin 2x.$

Решение:

Применим метод Даламбера. Уравнение характеристик имеет вид:

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0.$$

Последнее уравнения распадается на два уравнения, решениями которых являются прямые:

$$x - at = C_1, \; x + at = C_2.$$

Выполняя замену

$$\xi = x + at,$$

$$\eta = x - at,$$

придем к уравнению:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Общий интеграл последнего уравнения легко получить повторным интегрированием по ξ и по η:

$$u(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at). \qquad (*)$$

Подставляя решение в начальные условия, получим:

$$u\big|_{t=0}=f_1(x)+f_2(x)=3^x,$$

$$u_t\big|_{t=0}=af_1'(x)-af_2'(x)=\sin 2x.$$

Интегрируя второе равенство, получим

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\sin 2s ds+C=\frac{1}{2a}(\sin 2x-\sin 2x_0)+C,$$

где x_0 и C - постоянные.

Таким образом, получим

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=3^x, \\ f_1(x)-f_2(x)=\dfrac{1}{2a}(\sin 2x-\sin 2x_0)+C. \end{cases}$$

Выразим теперь из последних двух равенств f_1 и f_2

$$f_1(x)=\frac{3^x}{2}+\frac{1}{4a}(\sin 2x-\sin 2x_0)+\frac{C}{2},$$

$$f_2(x)=\frac{3^x}{2}-\frac{1}{4a}(\sin 2x-\sin 2x_0)-\frac{C}{2}.$$

Подставляя полученные выражения в общее решение (*) находим:

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)=$$

$$=\frac{3^{x+at}}{2}+\frac{1}{4a}(\sin 2\left(x+at\right)-\sin 2x_0)+\frac{C}{2}+$$

$$+\frac{3^{x-at}}{2}-\frac{1}{4a}(\sin 2\left(x-at\right)-\sin 2x_0)-\frac{C}{2}=$$

$$=3^x\left(\frac{3^{at}+3^{-at}}{2}\right)+\frac{1}{4a}\left(\sin\left(2x+2at\right)-\sin\left(2x-2at\right)\right)=$$

$$=3^x\left(\frac{3^{at}+3^{-at}}{2}\right)+\frac{1}{2a}\left(\sin\left(2at\right)\cos\left(2x\right)\right).$$

Таким образом, решение поставленной задачи Коши имеет вид:

$$u(x,t)=3^x\left(\frac{3^{at}+3^{-at}}{2}\right)+\frac{1}{2a}\left(\sin\left(2at\right)\cos\left(2x\right)\right).$$

Задача 2. Решить смешанную задачу для волнового уравнения (N -номер варианта):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < +\infty; \quad u(x,0) = x(x-l), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, u(0,t) = 0, u(l,t) = 0.$$

N	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	0,5	5	**3**	3	1	5	2	4	5	1	3	6
l	2	3	**0,5**	1	2	2	0,25	1	0,4	4	2	0,5

Решение:

Будем искать нетривиальные частные решения исходного уравнения, удовлетворяющие граничным условиям, в виде произведения двух функций, зависящих только от одного аргумента X=X(x) и T=T(t), а именно

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Вычислив производные u_{tt} è u_{xx} и подставив их в исходное уравнение, получим

$$X(x)T''(t) = 9X''(x)T(t)$$

или

$$\frac{1}{9}\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Это равенство выполняется только в том случае, если обе части его не зависят ни от x, ни от t, т.е. представляют собой одну и ту же постоянную, которую обозначим за $-\lambda=const$, т.е.

$$\frac{1}{9}\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

Отсюда получаем два обыкновенных однородных линейных уравнений второго порядка

$$T''(t)+9\lambda T(t)=0$$

и

$$X''(x)+\lambda X(x)=0.$$

Для того, чтобы получить не равные нулю решения, удовлетворяющие граничным условиям, необходимо найти нетривиальные решения, удовлетворяющие граничным условиям $X(0)=0,\ X(0.5)=0$. Это задача Штурма-Лиувилля. Решая эту задачу определяем, что $\lambda>0$. Его общее решение запишется в виде:

$$y(t)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right),\qquad x\in[0,0.5],$$

где коэффициенты A и B находятся из краевых условий:

$$y(0) = A = 0$$

и

$$y(1) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = B\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0.$$

Следовательно, $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, откуда

$$\sqrt{\lambda} = \pi k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому собственные числа в задаче Штурма-Лиувилля имеют вид: $\lambda = \pi^2 k^2$, $k \in \mathbb{N}$, а собственные функции имеют вид:

$$X_k(x) = \sin(\pi k x).$$

Теперь для всех $k \in \mathbb{N}$ выпишем общий вид решения уравнения:

$$T_k''(t) + 9\pi^2 k^2 T_k(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$T_k(t) = A_k \sin(3\pi k t) + B_k \cos(3\pi k t).$$

Пусть $U_k(x,t) = X_k(x) T_k(t)$, тогда решение начального уравнения в частных производных имеет вид:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_k(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t),$$

причем из краевых условий получим:

$$U(x,0)=u(x,0)=x(x-0.5) \text{ и } U_t(x,0)=u_t(x,0)=0.$$

Из краевых условий находим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_k(x)T_k(0)=\sum_{n=1}^{\infty} X_k(x)(B_k)=x(x-0.5)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_k(x)T_k'(0)=3\pi\sum_{n=1}^{\infty} kX_k(x)(A_k)=0.$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты $\mathrm{A_k}$ и $\mathrm{B_k}$, разложим в ряд Фурье по функциям $\mathrm{X_k(x)}$ функцию $x(x-0.5)$:

$$x(x-0.5)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x),$$

где

$$a_k=2\int_0^1 x(x-0.5)\sin(\pi kx)\,dx=-\frac{(-1)^k(\pi^2k^2-4)+4}{\pi^3k^3}.$$

Из второго уравнения следует, что

$$b_k=0.$$

Отсюда получаем:

$A_k = 0$,

$$B_k = a_k = -\frac{(-1)^k\left(\pi^2k^2-4\right)+4}{\pi^3k^3}.$$

Таким образом, решение исходного уравнения запишется в виде:

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_k(x)T_k(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi kx)\left(\frac{(-1)^k\left(4-\pi^2k^2\right)-4}{\pi^3k^3}\cos(3\pi kt)\right).$$

Ответ: $U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi kx)\left(\frac{(-1)^k\left(4-\pi^2k^2\right)-4}{\pi^3k^3}\cos(3\pi kt)\right).$

Задача 3. Найти решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке (N -номер варианта):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad t>0;\quad u(x,0)=\begin{cases}\frac{2x^2}{l}, & 0<x\le\frac{l}{2},\\ l-x, & \frac{l}{2}<x<l,\end{cases}\quad u(0,t)=0,\ u(l,t)=0.$$

N	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	4	2	**0,5**	1	3	0,3	4	4	3	0,5	1	4

l	3	1	**3**	2	4	1	5	2	5	1	3	2

Решение:

Применим метод разделения переменных:

$u = T(t)X(x)$,

После подстановки в уравнение:

$$4\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

$$T' + \lambda T = 0,$$

$$X'' + \lambda X = 0.$$

При этом имеем однородные граничные условия $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Уравнение для X вместе с граничными условиями дает задачу Штурма-Лиувиля: найти все значения параметра λ при котором задача имеет нетривиальное решение. Необходимо рассмотреть следующие случаи

1. $\lambda = 0$: $X'' = 0$, $X = c_1 x + c_2$, в этом случае граничным условиями удовлетворяет только тривиальное решение.

2. $\lambda = -s^2 < 0$, $X'' - s^2 X = 0$, $X = c_3 \operatorname{sh} sx + c_4 \operatorname{ch} sx$; находя c_3 и c_4 из граничных условий, так же приходим к тривиальному решению.

3. $\lambda = s^2 > 0$, $X'' + s^2 X = 0$, $X = A\cos sx + B\sin sx$; подставляя решение в граничные условия, получим: $A = 0$, $B\sin 3s = 0$, $3s = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $\lambda = \sqrt{s} = \sqrt{k\pi / 3}$.

С учетом найденного λ решение уравнения для T будет иметь вид:

$$T_k = Ce^{-\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k\pi}{3}}\right)t}.$$

Частное решение краевой задачи будет иметь вид:

$$u_k = C_k \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right)e^{-\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k\pi}{3}}\right)t},$$

А общее решение получается путем суммирования частных решений:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right)e^{-\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k\pi}{3}}\right)t}.$$

Константы C_k найдем из начального условия.

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right) = f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, & 0 < x \le \frac{3}{2}, \\ 3 - x, & \frac{3}{2} < x < 3, \end{cases}$$

Таким образом, для нахождения констант, функцию $f(x)$, задающую значение функции в начальный момент времени, следует разложить в ряд

Фурье по синусам. Используя известную формулу дня нахождения коэффициентов ряда Фурье, получим:

$$C_k = \frac{2}{3}\int_0^3 f(\xi)\sin\left(\frac{\pi k}{3}\xi\right)d\xi = \frac{2}{3}\int_0^{3/2}\frac{2}{3}\xi^2\sin\left(\frac{\pi k}{3}\xi\right)d\xi + \frac{2}{3}\int_{3/2}^{3}(3-\xi)\sin\left(\frac{\pi k}{3}\xi\right)d\xi =$$

$$= \frac{12}{k^3\pi^3}\left(-\frac{1}{9}k^2\pi^2\xi^2\cos\left(\frac{k\pi\xi}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{k\pi\xi}{3}\right) + \frac{2}{3}k\pi\xi\sin\left(\frac{k\pi\xi}{3}\right)\right)\Bigg|_0^{3/2} +$$

$$+\frac{2}{k\pi}\left(-3\cos\left(\frac{k\pi\xi}{3}\right) - \frac{3}{k\pi}\left(\sin\left(\frac{k\pi\xi}{3}\right) - \frac{1}{3}k\pi\xi\cos\left(\frac{k\pi\xi}{3}\right)\right)\right)\Bigg|_{3/2}^{3} =$$

$$= -\frac{3}{k^3\pi^3}\left(8 - 8\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + k^2\pi^2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 4k\pi\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) +$$

$$+\frac{3}{k^2\pi^2}\left(k\pi\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left(\frac{24}{k^3\pi^3} - \frac{3}{k\pi} + \frac{3}{k\pi}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left(-\frac{12}{k^2\pi^2} + \frac{6}{k^2\pi^2}\right) - \frac{24}{k^3\pi^3} =$$

$$= \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left(\frac{24}{k^3\pi^3}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left(-\frac{6}{k^2\pi^2}\right) - \frac{24}{k^3\pi^3}.$$

,

Окончательно получим:

$$C_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left(\frac{24}{k^3\pi^3}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left(-\frac{6}{k^2\pi^2}\right) - \frac{24}{k^3\pi^3},$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left(\frac{24}{k^3\pi^3}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left(-\frac{6}{k^2\pi^2}\right) - \frac{24}{k^3\pi^3}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right)e^{-\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k\pi}{3}}\right)t}.$$

Задача 4. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа для круга:

$\Delta u = 0, \quad 0 \le r < R; \quad u\big|_{r=R} = f(\varphi).$

3. $R = 3,\ f(\phi) = \phi^2 + 6\phi + 1.$

Решение:

Уравнение Лапласа в полярных координатах (r, φ) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0\,.$$

Применим метод разделения переменных, т.е. будем искать решение в виде:

$u = R(r)F(\varphi)$, тогда

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)F + R\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = 0\,,$$

$$\frac{1}{R}r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = -\lambda = const\,.$$

Рассмотрим уравнение для F:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \lambda F = 0\,.$$

Требуется отыскать все значения λ, при которых уравнение имеет нетривиальное 2π-периодическое решение.

Пусть $\lambda > 0$, тогда

$$F = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi,$$

$$F(\varphi) = F(2\pi k + \varphi).$$

Очевидно такое возможно если $\sqrt{\lambda} = n$ - целое число, значит решение задачи на собственные значения имеет вид:

$$\lambda = n^2,\ n \in \mathbf{Z},$$

$$F = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi.$$

Очевидно что при $\lambda \le 0$ уравнение периодических решений не имеет.

Функцию $R(r)$ будем искать в виде $R = r^{\mu}$; тогда подставляя в уравнение для R и сокращая на r^{μ}, получим $n^2 = \mu^2$ или $\mu = \pm n$, что дает два линейно независимых решения. Общее решение будет суммой частных решений:

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n}.$$

Поскольку мы рассматриваем внутреннюю задачу, следует положить $D = 0$. Тогда частное решение уравнения Лапласа будет иметь вид

$$u_n = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

а общее решение запишется в виде суммы частных решений:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Константы A_n и B_n можно найти из условия на границе круга. Для этого функцию $u|_{r=3} = f(\varphi) = \varphi^2 + 6\varphi + 1$ необходимо разложить в ряд Фурье по собственным функциям задачи:

$$f(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\varphi\right)+b_n\sin\left(n\varphi\right)\right],$$

Приравнивая коэффициенты в выражении для u и в разложении f, получим

$$A_0=\frac{a_0}{2},\ A_n=\frac{a_n}{\rho^n},\ B_n=\frac{b_n}{\rho^n},$$

где $\rho=3$ - радиус окружности.

Коэффициенты ряда Фурье находятся по известным формулам

Коэффициенты .a_n и b_n определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos\left(n\varphi\right)d\varphi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin\left(n\varphi\right)d\varphi.$$

Интеграл для a_0 представляется в виде суммы табличных интегралов, а остальные два интеграла можно вычислить, применив дважды метод интегрирования по частям. В результате получим:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi^2+6\varphi+1)d\varphi=\frac{2\pi^2}{3}+2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi^2+6\varphi+1)\cos\left(n\varphi\right)d\varphi=(-1)^n\frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi^2 + 6\varphi + 1)\sin\left(n\varphi\right) d\varphi = (-1)^{n+1}\frac{12}{n}.$$

Таким образом, решение задачи Дирихле имеет вид:

$$u = 2 + \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{\rho}{3}\right)^n \frac{1}{n^2}(\cos n\varphi + 3n\sin n\varphi).$$