Теория игр

Матричные игры. Игры с природой

Задание 1

Найти оптимальные стратегии игры (с седловой точкой):

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\begin{array}{l} \left.\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 2 \\ \to 3 \\ \to 2 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 3 = \alpha \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 5 \end{matrix} \Big\} \min\limits_j \max\limits_i = 3 = \beta \end{array}$$

Так как $\alpha = \beta = 3$, следовательно, платёжная матрица имеет седловую точку и цена игры равна $v = 3$. Это значит, что чистые стратегии уравновешены и ни одному из игроков нет смысла уклоняться от своей оптимальной стратегии. Оптимальные стратегии – игрока А: A_2, игрока В: B_2. Решение $(A_2 B_2 3)$.

Задание 2

Решить игру с заданной платёжной матрицей, используя графический метод:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \to 0 \\ \to 2 \\ \to 1 \\ \to 1 \end{matrix} \end{matrix}\right\} \quad \max_i \min_j a_{ij} = 2 = \alpha$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 5 & 3 \end{matrix} \quad \Big\} \min_j \max_i = 3 = \beta$$

Следовательно, цена игры находится в пределах $2 \le v \le 3$.

Седловой точки нет. Так как матрица имеет размер 4×2, решение ищем сначала для игрока B. Сделаем рисунок, чтобы определить *верхнюю границу игры*, так как игрок B выбирает из максимальных проигрышей минимальный (минимаксная стратегия).

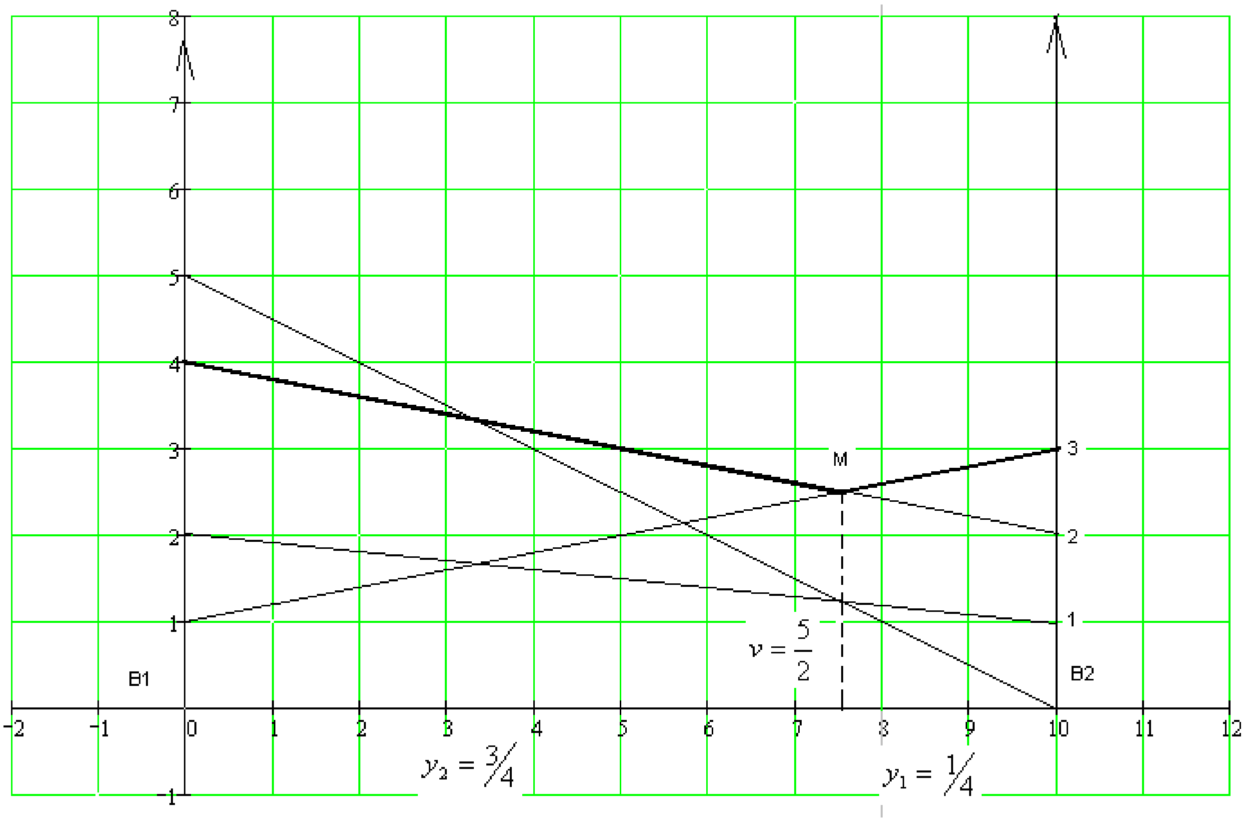

Рис.1- Геометрический способ матричной игры

Жирной линией выделена верхняя граница игры, M - точка с min ординатой, которая соответствует цене игры. Активными стратегиями игрока A будут 2-я и 4-я. Это означает, что вероятность выбора 1-й и 3-й стратегий равны нулю, т.е. $x_1=0$; $x_3=0$.

Решение для игрока B получим из следующей системы:

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 = v \Rightarrow A_2 \\ y_1 + 3y_2 = v \Rightarrow A_4 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

$$4y_1 + 2y_2 = y_1 + 3y_2$$
$$3y_1 = y_2$$
$$3y_1 = 1 - y_1$$
$$4y_1 = 1$$
$$y_1 = 1/4$$
$$y_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$v = 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\overline{Y} = \left(1/4; 3/4\right)$$

Вероятность выбора 1-й стратегии игроком В: $y_1 = 1/4$, второй $y_2 = 3/4$, цена игры $v = \frac{5}{2}$.

Теперь найдём x_2 и x_4 из возможных трёх уравнений:

$$\begin{cases} 4x_2 + x_4 = \frac{5}{2} \\ 2x_2 + 3x_4 = \frac{5}{2} \\ x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$4x_2 + x_4 = 2x_2 + 3x_4$$
$$2x_2 = 2x_4$$
$$x_2 = x_4$$
$$x_2 = 1 - x_2$$
$$2x_2 = 1$$
$$x_2 = 1/2$$
$$x_4 = 1 - 1/2 = 1/2$$

$$\overline{X}(0;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}).$$

для игрока *A*: $\overline{X}=(0;\,{}^{1}\!/_{2};0;\,{}^{1}\!/_{2})$,

для игрока *B*: $\overline{Y}=({}^{1}\!/_{4};\,{}^{3}\!/_{4})$, цена игры $v={}^{5}\!/_{2}$.

Задание 3

Решить игру с заданной платёжной матрицей, используя графический метод:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 9 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 10 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение

Найдём цену игры:

$$\begin{array}{l} \left.\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 9 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 10 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} \to -1 \\ \to 1 \\ \to 2 \\ \to -2 \end{matrix}\right\} \max_i \min_j a_{ij} = 2 = \alpha \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 4 & 9 & 5 & 10 & 6 \end{matrix} \quad \min_j \max_i = 4 = \beta \end{array}$$

Следовательно, цена игры находится в пределах $2 \le v \le 4$.

Седловой точки нет. Прежде, чем приступить к решению задачи графическим методом, необходимо преобразовать матрицу.

Стратегия B4 является доминирующей над стратегией B1, так как каждый элемент столбца 4 меньше соответствующего элемента столбца 1. Игроку B не выгодно пользоваться стратегией B1. Удаляем стратегию B1 из рассмотрения.

	Стратегии игрока B				
	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	-1	2	4	9	5
A_2	4	9	2	1	4
A_3	3	2	5	10	4
A_4	1	0	-2	1	6

Стратегия B2 является доминирующей над стратегией B6, так как каждый элемент столбца 1 меньше или равен соответствующего элемента столбца 5. Игроку B не выгодно пользоваться стратегией B6. Удаляем стратегию B6 из рассмотрения.

	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	-1	2	4	9
A_2	4	9	2	1
A_3	3	2	5	10
A_4	1	0	-2	1

Стратегия A3 является доминирующей над стратегией A1, так как каждый элемент строки 3 больше или равен соответствующего элемента строки 1. Игроку А заведомо не выгодно пользоваться стратегией А1. Удаляем стратегию А1 из рассмотрения.

	B_2	B_3	B_4	B_5
A_2	4	9	2	1
A_3	3	2	5	10
A_4	1	0	-2	1

Стратегия А2 является доминирующей над стратегией А4, так как каждый элемент строки 1 больше или равен соответствующего элемента строки 3. Игроку А заведомо не выгодно пользоваться стратегией А4. Удаляем стратегию А4 из рассмотрения.

	B_2	B_3	B_4	B_5
A_2	4	9	2	1
A_3	3	2	5	10

Теперь можем приступить к графическому методу решения задачи.

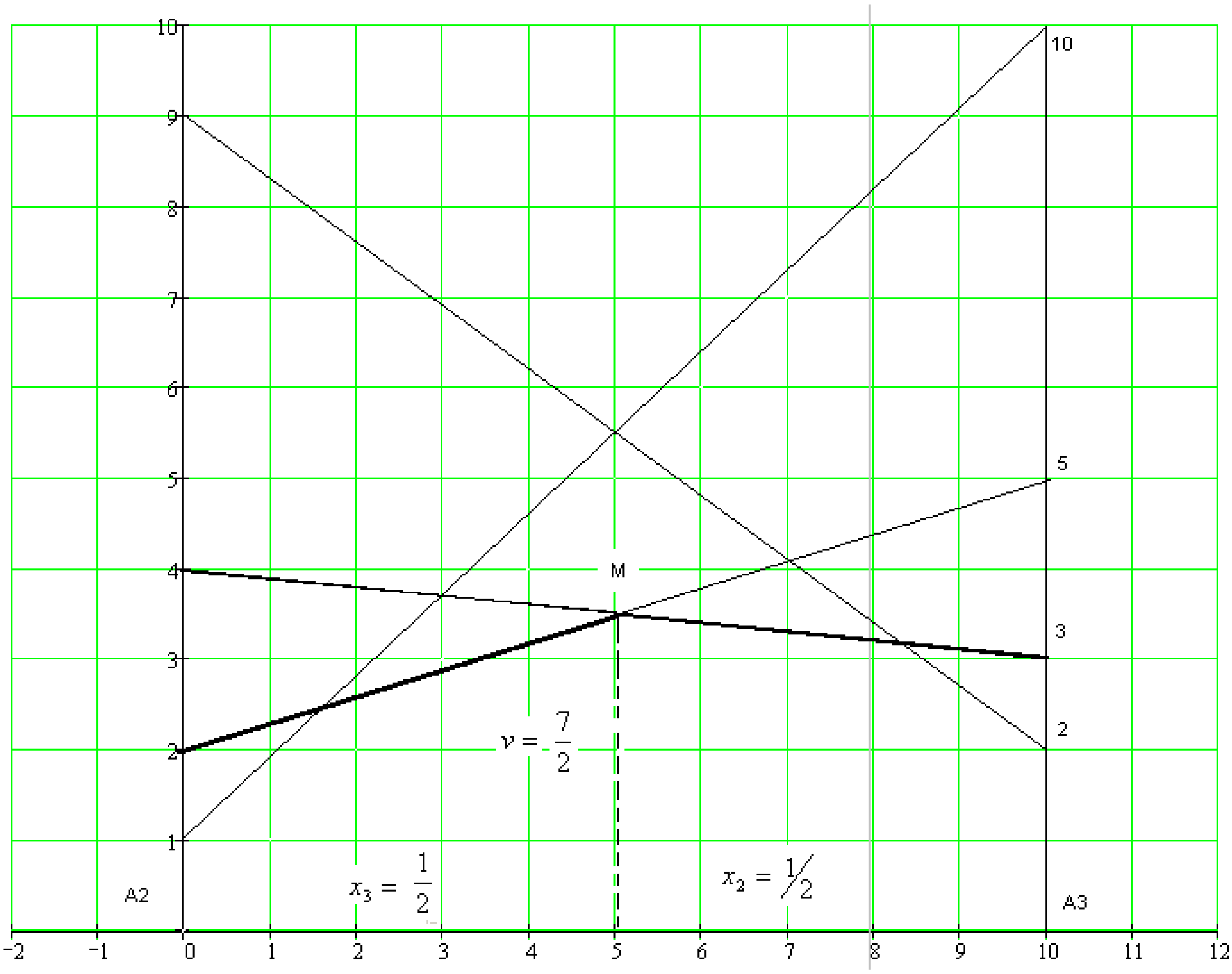

Рис.2- Геометрический способ матричной игры

Игра ведется в смешанных стратегиях. Так как матрица имеет размер 2×4, поиск оптимальных смешанных стратегий начинаем с игрока А – у него две чистые стратегии. Строим прямые:

4-3, 9-2, 2-5, 1-10. Жирно выделена линия, определяющая нижнюю границу игры. Точка с наибольшей ординатой на этой линии – М. Она лежит на пересечении прямых 4-3 и 2-5, которые соответствуют стратегиям B_2 и B_4 игрока В. Можно сразу сделать вывод, что активными у игрока В будут стратегии B_2 и B_4, т.е. вероятность их применения будет отлична от нуля, а вероятность применения стратегии B_3 и B_5 равна нулю (

$y_2 \neq 0, y_3 = 0, y_4 \neq 0, y_5 = 0$, т.е. $y_2 + y_4 = 1$). Этот вывод используем при решении задачи для игрока B.

Для игрока A составим систему уравнений, отражающую тот факт, что он получит свой средний выигрыш при использовании игроком B как второй, так и четвёртой стратегии:

$$\begin{cases} 4x_2 + 3x_3 = v; B_2 \\ 2x_2 + 5x_3 = v; B_4 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$4x_2 + 3x_3 = 2x_2 + 5x_3$$
$$2x_2 = 2x_3$$
$$x_2 = 1 - x_2$$
$$2x_2 = 1$$
$$x_2 = 1/2$$
$$x_3 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$v = 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

Для игрока B система уравнений (с учетом $y_3 = 0, y_5 = 0$):

$$\begin{cases} 4y_2 + 2y_4 = v \to \mathrm{A}_2 \\ 3\mathrm{y}_2 + 5\mathrm{y}_4 = v \to A_3 \\ y_2 + y_4 = 1 \end{cases}$$

$$4y_2 + 2(1 - y_2) = \frac{7}{2}$$
$$2y_2 = \frac{7}{2} - 2$$
$$2y_2 = \frac{3}{2}$$
$$y_2 = \frac{3}{4}$$

$$y_4 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

На рисунке можно проверить этот результат по клеткам.

для игрока *A*: $\overline{X} = (0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$,

для игрока *B*: $\overline{Y} = (0; \frac{3}{4}; 0; \frac{1}{4}; 0; 0)$, цена игры $v = \frac{7}{2}$.

Задание 4

Решить игру с заданной платёжной матрицей, используя графический метод:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 6 & -5 & 7 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение

Найдём цену игры:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 6 & -5 & 7 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to -4 \\ \to -5 \\ \to -4 \\ \to -6 \end{matrix} \Bigg\} \quad \max_i \min_j a_{ij} = -4 = \alpha$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 4 & 7 \end{matrix} \qquad \min_j \max_i = 3 = \beta$$

Следовательно, цена игры находится в пределах $-4 \le v \le 3$.

Седловой точки нет. Прежде, чем приступить к решению задачи графическим методом, необходимо преобразовать матрицу.

Стратегия B1 является доминирующей над стратегией B2, так как каждый элемент столбца 1 меньше соответствующего элемента столбца 2. Игроку B не выгодно пользоваться стратегией B2. Удаляем стратегию B2 из рассмотрения.

	B_1	B_3	B_4
A_1	1	-4	3
A_2	0	-5	7
A_3	-4	4	6
A_4	3	-6	5

Стратегия B1 является доминирующей над стратегией B4, так как каждый элемент столбца 1 меньше соответствующего элемента столбца 3. Игроку B не выгодно пользоваться стратегией B4. Удаляем стратегию B4 из рассмотрения.

	B_1	B_3
A_1	1	-4
A_2	0	-5
A_3	-4	4
A_4	3	-6

Стратегия A1 является доминирующей над стратегией A2, так как каждый элемент строки 1 больше соответствующего элемента строки 2. Игроку A не выгодно пользоваться стратегией A2. Удаляем стратегию A2 из рассмотрения.

	B_1	B_3
A_1	1	-4
A_3	-4	4
A_4	3	-6

Так как матрица имеет размер 3×2, решение ищем сначала для игрока B. Сделаем рисунок, чтобы определить *верхнюю границу игры*, так как игрок B выбирает из максимальных проигрышей минимальный (минимаксная стратегия).

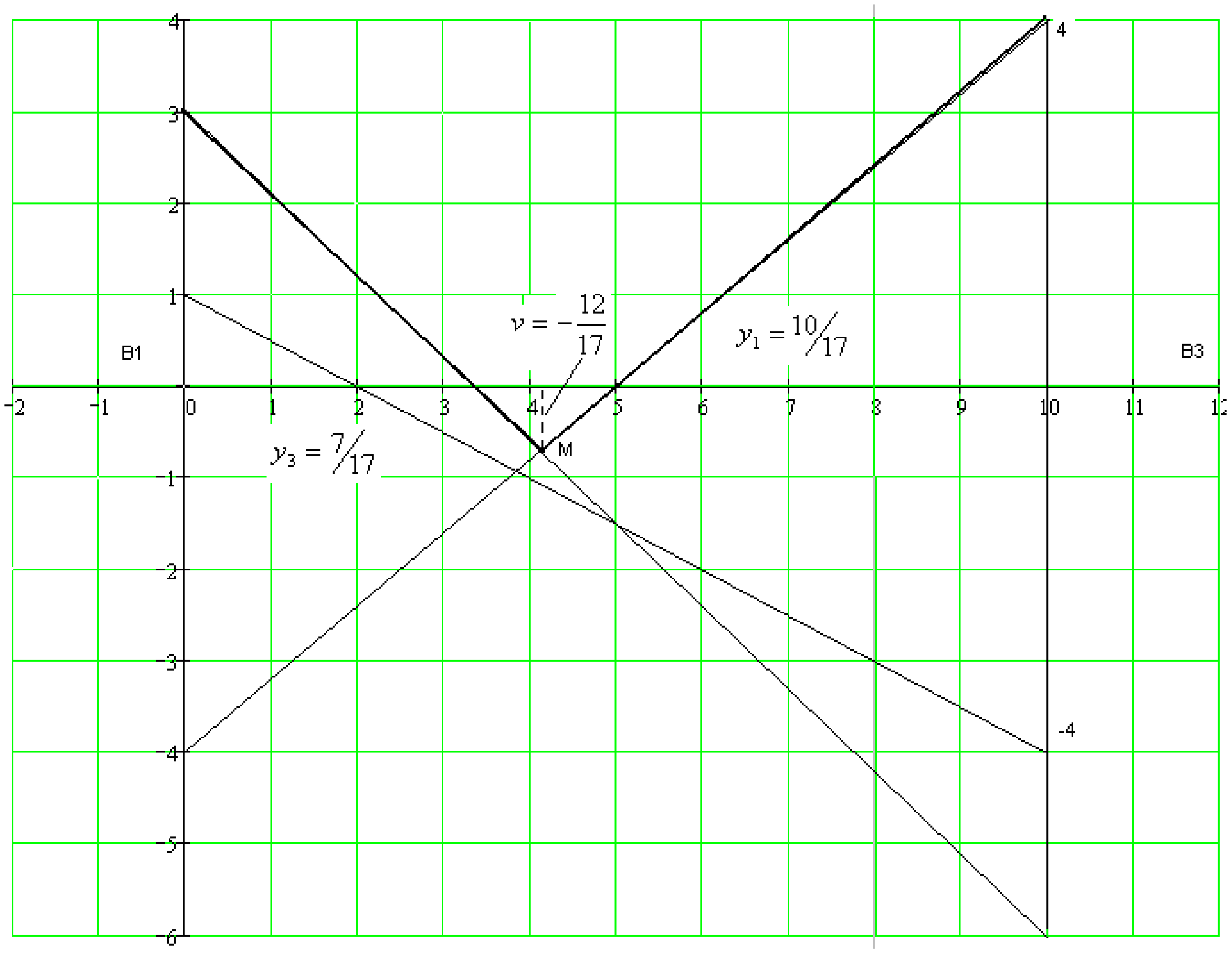

Рис.3- Геометрический способ матричной игры

Жирной линией выделена верхняя граница игры, M - точка с min ординатой, которая соответствует цене игры. Активными стратегиями игрока A будут 3-я и 4-я. Это означает, что вероятность выбора 1-й и 2-й стратегий равны нулю, т.е. $x_1=0$; $x_2=0$.

Решение для игрока B получим из следующей системы:

$$\begin{cases} -4y_1 + 4y_3 = v \Rightarrow A_3 \\ 3y_1 - 6y_3 = v \Rightarrow A_4 \\ y_1 + y_3 = 1 \end{cases}$$

$$-4y_1+4y_3=3y_1-6y_3$$
$$-7y_1=-10y_3$$
$$7y_1=10(1-y_1)$$
$$17y_1=10$$
$$y_1=10/17$$
$$y_3=1-\frac{10}{17}=\frac{7}{17}$$

$$v=4\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$$

$$\overline{Y}=\left(10/17;0;7/17;0\right)$$

Вероятность выбора 1-й стратегии игроком B: $y_1=10/17$, третьей $y_3=7/17$, цена игры $v=-4\cdot\frac{10}{17}+4\cdot\frac{7}{17}=-\frac{12}{17}$.

Теперь найдём x_3 и x_4 из возможных трёх уравнений:

$$\begin{cases}-4x_3+3x_4=-\frac{12}{17}\\ 4x_3-6x_4=-\frac{12}{17}\\ x_3+x_4=1\end{cases}$$

$$-4x_3+3x_4=4x_3-6x_4$$
$$-8x_3=-9x_4$$
$$-8x_3=-9(1-x_3)$$
$$-8x_3=-9+9x_3$$
$$-17x_3=-9$$
$$x_3=9/17$$
$$x_4=1-9/17=8/17$$

$$\overline{X}(0;0;{}^{9}\!/_{17};{}^{8}\!/_{17}).$$

для игрока *A*: $\overline{X}=(0;0;{}^{9}\!/_{17};{}^{8}\!/_{17})$,

для игрока *B*: $\overline{Y}=\left({}^{10}\!/_{17};0;{}^{7}\!/_{17};0\right)$, цена игры $v=-\dfrac{12}{17}$.

Задание 5

Решите игру с заданной платёжной матрицей, используя симплекс – метод:

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение

Найдём цену игры:

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to & 4 \\ \to & 4 \\ \to & 4 \\ \to & 4 \\ \to & 4 \end{matrix} \Bigg\} \quad \max_i \min_j a_{ij} = 4 = \alpha \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 8 & 8 & 5 \end{matrix} \quad \min_j \max_i = 5 = \beta \end{array}$$

Следовательно, цена игры находится в пределах $4 \le v \le 5$.

Седловой точки нет.

Стратегия A4 является доминирующей над стратегией A2, так как каждый элемент строки 5 больше или равен соответствующего элемента строки 2. Игроку A не выгодно пользоваться стратегией A2. Удаляем стратегию A2 из рассмотрения.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	9	4	4	5
A_3	6	4	5	5
A_4	8	8	8	4
A_5	5	5	4	5

Стратегия B2 является доминирующей над стратегией B1, так как каждый элемент столбца 2 меньше или равен соответствующего элемента столбца 1. Игроку B не выгодно пользоваться стратегией B1. Удаляем стратегию B1 из рассмотрения.

	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	5
A_3	4	5	5
A_4	8	8	4
A_5	5	4	5

Стратегия A3 является доминирующей над стратегией A1, так как каждый элемент строки 2 больше или равен соответствующего элемента строки 1. Игроку A не выгодно пользоваться стратегией A1. Удаляем стратегию A1 из рассмотрения.

	B_2	B_3	B_4
A_3	4	5	5
A_4	8	8	4
A_5	5	4	5

Запишем задачу линейного программирования, в которой требуется найти максимум целевой функции $L = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$ при следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 1 \\ 8x_1 + 8x_2 + 4x_3 \le 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 1 \end{cases}$$

Приводим математическую модель к каноническому виду, для этого вводим три дополнительные переменные со знаком плюс x_4, x_5, x_6, так как знак неравенства $\le$. В результате модель примет вид:

$$L = x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_5 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_6 = 1 \end{cases}$$

Дальнейшее решение представим в виде симплекс – таблиц.

Составим таблицу 1.

Таблица 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				1	1	1	0	0	0		
2	Базис	Сб	b	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Отношения	Коэфф.
3	x4	0	1	4	5	5	1	0	0	1/4	1/2
4	x5	0	1	8	8	4	0	1	0	1/8	-
5	x6	0	1	5	4	5	0	0	1	1/5	5/8
6		L	0	-1	-1	-1	0	0	0		
7											

Так как задача на нахождение максимального значения целевой функции, то в индексной строке не должно быть отрицательных оценок. Выделяем первый столбец. Находим оценочные отношения:

$\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{5}$, наименьшее из них $\frac{1}{8}$ - вторая строка, выделяем её. Из базиса выводим переменную x_5, при этом в базис вводим переменную x_1. В последний столбец записываем пересчитывающие коэффициенты:

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ и $\frac{5}{8}$, которые необходимы при пересчёте всех невыделенных элементов по методу Гаусса. Элементы строки 2 делим на 8, а первую и третью строки пересчитываем. Перейдём к таблице 2.

Таблица 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				1	1	1	0	0	0		
2	Базис	Сб	b	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Отношения	Коэфф.
10	x4	0	1/2	0	1	3	1	- 1/2	0	1/6	1 1/5
11	x1	1	1/8	1	1	1/2	0	1/8	0	1/4	1/5
12	x6	0	3/8	0	-1	2 1/2	0	- 5/8	1	3/20	-
13		L	1/8	0	0	- 1/2	0	1/8	0		
14											

План не оптимален, есть отрицательная оценка, выделяем столбец с переменной x_3. После нахождения оценочных отношений, видим наименьшее находится в строке 3, которую выделяем. Из базиса выводим переменную x_6, при этом в базис вводим переменную x_3. Элементы строки 3 делим на $2\frac{1}{2}$, а строки 1 и 2 пересчитываем. Перейдём к таблице 3.

Таблица 3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				1	1	1	0	0	0		
2	Базис	Сб	b	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Отношения	Коэфф.
17	x4	0	1/20	0	2 1/5	0	1	1/4	-1 1/5	1/44	-
18	x1	1	1/20	1	1 1/5	0	0	1/4	- 1/5	1/24	6/11
19	x3	1	3/20	0	- 2/5	1	0	- 1/4	2/5	-	- 2/11
20		L	1/5	0	- 1/5	0	0	0	1/5		
21											

Снова присутствует отрицательная оценка, поэтому выделяем столбец с переменной x_2, а затем выделяем первую строку, так как наименьшее оценочное отношение $\frac{1}{44}$ находится в первой строке. Из базиса выводим переменную x_4, при этом в базис вводим переменную x_2, строки 2 и 3 пересчитываем. Перейдём к таблице 4.

Таблица 4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				1	1	1	0	0	0		
2	Базис	Сб	b	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Отношения	Коэфф.
24	x2	1	1/44	0	1	0	5/11	5/44	- 6/11		
25	x1	1	1/44	1	0	0	- 6/11	5/44	5/11		
26	x3	1	7/44	0	0	1	2/11	- 9/44	2/11		
27		L	9/44	0	0	0	1/11	1/44	1/11		
28											

Получили оптимальный план, так как в индексной строке нет отрицательных оценок.

$x_1 = 1/44; x_2 = 1/44; x_3 = 7/44$, $L_{\max} = 9/44$.

Учитывая правило формирование ответа симметричной двойственной задачи, запишем её решение, на основании последней симплексной таблицы.

$y_1 = 1/11; y_2 = 1/44; y_3 = 1/11$.

$L_{\max} = F_{\min} = 9/44$.

Найдём цену игры:

$$v = \frac{1}{L_{\max}} = \frac{44}{9}.$$

Теперь можем найти оптимальное решение нашей игры.

$p_1 = 0$

$p_2 = 0$

$p_3 = y_1 \cdot v = \frac{1}{11} \cdot \frac{44}{9} = \frac{4}{9}$

$p_4 = y_2 \cdot v = \frac{1}{44} \cdot \frac{44}{9} = \frac{1}{9}$

$p_5 = y_3 \cdot v = \frac{1}{11} \cdot \frac{44}{9} = \frac{4}{9}$

$q_1 = 0$

$q_2 = x_1 \cdot v = \frac{1}{44} \cdot \frac{44}{9} = \frac{1}{9}$

$q_3 = x_2 \cdot v = \frac{1}{44} \cdot \frac{44}{9} = \frac{1}{9}$

$q_4 = x_3 \cdot v = \frac{7}{44} \cdot \frac{44}{9} = \frac{7}{9}$

Ответ: для игрока А: $\overline{X} = (0;0; 4/9; 1/9; 4/9)$

для игрока В: $\overline{Y} = (0; 1/9; 1/9; 7/9)$, цена игры $v = 44/9$.

Задание 6

Для матрицы выигрышей в игре с природой

	П1	П2	П3	П4	П5
А1	6	3	4	7	5
А2	1	2	1	6	5
А3	2	1	2	5	5
А4	4	2	2	5	3
А5	1	2	5	6	5
q	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти показатели благоприятности для состояний природы, построить модель рисков. Используя критерий Байеса, по полученным матрицам определить оптимальные стратегии игрока А:

а) по значениям вероятностей появления событий природы q_j;

б) считая состояния природы равновероятными;

в) сравнить полученные результаты и дать им соответствующую трактовку.

Решение

Показателем благоприятности состояния Q_j природы Q называется наибольший выигрыш при этом состоянии, то есть наибольший элемент $j-$го столбца: $\beta_j = \max_i a_{ij}$, $j=\overline{1,n}$.

Вычислим показатели благоприятности:

$\beta_1 = 6, \beta_2 = 3, \beta_3 = 5, \beta_4 = 7, \beta_5 = 5$.

Риском r_{ij} игрока А при выборе им стратегии A_i и при состоянии природы Q_j называется разность между показателем благоприятности β_j и выигрышем a_{ij}: $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$. То есть риск – это разность между выигрышем, который игрок получил бы, если бы он точно знал, что состоянием среды будет Q_j, и выигрышем, который он получит, не имея этой информации.

Тогда матрица рисков будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

а) По критерию Байеса за оптимальные, принимается та стратегия (чистая) A_i, при которой максимизируется средний выигрыш a или минимизируется средний риск r.

Считаем значения $\sum(a_{ij} p_j)$:

$$\sum\left(a_{1,j}p_j\right)=6\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}3+7\cdot 0{,}3+5\cdot 0{,}1=5$$
$$\sum\left(a_{2,j}p_j\right)=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}3+6\cdot 0{,}3+5\cdot 0{,}1=3{,}1$$
$$\sum\left(a_{3,j}p_j\right)=2\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}3+5\cdot 0{,}3+5\cdot 0{,}1=3$$
$$\sum\left(a_{4,j}p_j\right)=4\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}3+5\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}1=3{,}2$$
$$\sum\left(a_{5,j}p_j\right)=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}3+6\cdot 0{,}3+5\cdot 0{,}1=4{,}3$$

A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\sum(a_{ij}p_j)$
A_1	0.6	0.6	1.2	2.1	0.5	5
A_2	0.1	0.4	0.3	1.8	0.5	3.1
A_3	0.2	0.2	0.6	1.5	0.5	3
A_4	0.4	0.4	0.6	1.5	0.3	3.2
A_5	0.1	0.4	1.5	1.8	0.5	4.3
p_j	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1	0

Выбираем из (5; 3.1; 3; 3.2; 4.3) максимальный элемент max=5.

Вывод: выбираем стратегию N=1.

б) примем состояния природы равновероятными, пусть будет $q_1=q_2=q_3=q_4=q_5=0{,}2$.

Считаем значения $\sum\left(a_{ij}p_j\right)$:

$$\sum\left(a_{1,j}p_j\right)=6\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}2+7\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}2=5$$
$$\sum\left(a_{2,j}p_j\right)=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}2=3$$
$$\sum\left(a_{3,j}p_j\right)=2\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}2=3$$
$$\sum\left(a_{4,j}p_j\right)=4\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}2=3{,}2$$
$$\sum\left(a_{5,j}p_j\right)=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}2=3{,}8$$

A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\sum(a_{ij}p_j)$
A_1	1.2	0.6	0.8	1.4	1.0	5
A_2	0.2	0.4	0.2	1.2	1.0	3
A_3	0.4	0.2	0.4	1.0	1.0	3
A_4	0.8	0.4	0.4	1.0	0.6	3.2
A_5	0.2	0.4	1.0	1.2	1.0	3.8
p_j	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0

Выбираем из (5; 3; 3; 3.2; 3.8) максимальный элемент max=5

Таким образом, в результате решения статистической игры по критерию Байеса рекомендовалась стратегия A_1, причём не важно разные значения вероятностей появления событий природы q_j или равновероятные.