Равномерный закон распределения: задача с решением

Задача. Случайная величина X задана интегральной $F(x)$ или дифференциальной $f(x)$ функцией. Требуется:
а) найти параметр C;
б) при заданной интегральной функции $F(x)$ найти дифференциальную функцию $f(x)$; а при заданной дифференциальной функции $f(x)$ найти интегральную функцию $F(x)$;
в) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;
г) найти математическое ожидание $M[X]$ дисперсию $D[X]$ среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$;
д) вычислить вероятность попадания в интервал $P\{a \le X \le b\}$;
е) определить, квантилем какого порядка является точка x_p;
ж) вычислить квантиль порядка p.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ C, & -1\le x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

$a=-1/3,\ b=1/2,\ x_p=0,\ p=0{,}9$.

Решение.

а) Найдем параметр C из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$. Получаем:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{1} Cdx=Cx\Big|_{-1}^{1}=C(1+1)=2C=1$, откуда $C=1/2$. Получаем:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ \frac{1}{2}, & -1\le x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

б) По заданной дифференциальной функции $f(x)$ найдем интегральную функцию $F(x)$.

Найдем функцию распределения $F(x)$ по определению $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Получаем:

Пусть $x<-1$, тогда $f(x)=0$, тогда $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$.

Пусть $-1\le x\le 1$, тогда $f(x)=\frac{1}{2}$, тогда $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} 0dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{x} dt=\frac{1}{2}(t)\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}(x+1)$.

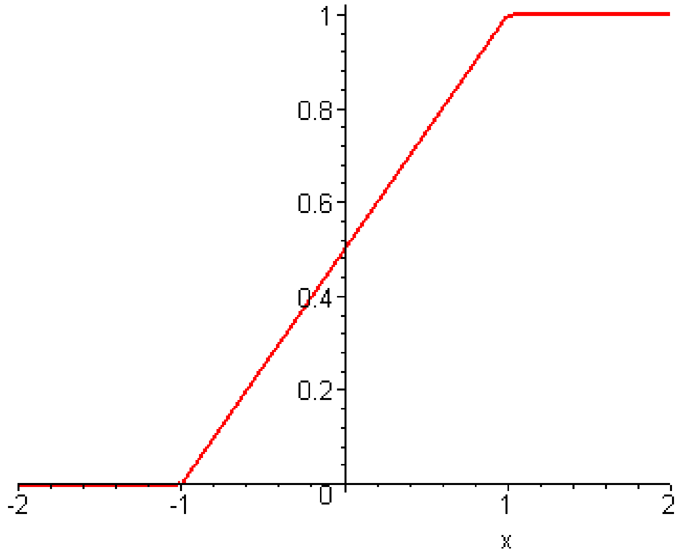
Пусть $x>1$, тогда $f(x)=0$, тогда $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} 0dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dt+\int_{1}^{x} 0dt=\frac{1}{2}(t)\Big|_{-1}^{1}=1$.

Функция распределения:

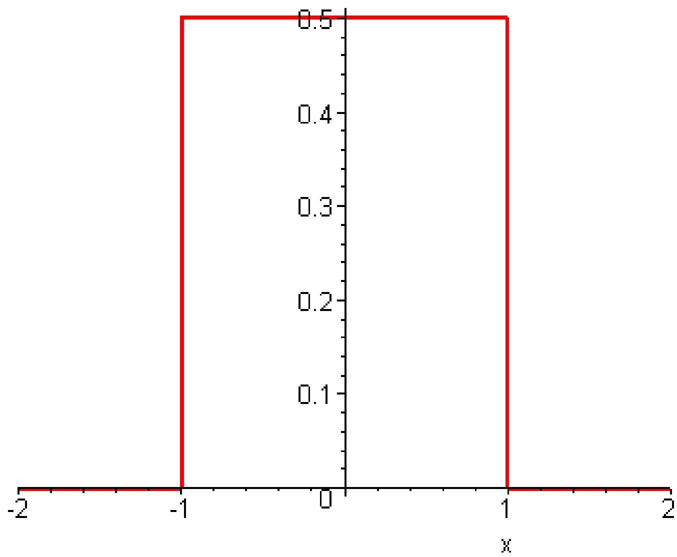
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ \frac{1}{2}(x+1), & -1\le x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

в) Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Функция распределения: $F(x)$



Плотность распределения $f(x)$:



г) Найдем математическое ожидание $M[X]$ дисперсию $D[X]$ среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ \frac{1}{2}, & -1\le x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx=\frac{1}{4}x^2\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{4}(1-1)=0$$

Найдем дисперсию $D[X]$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2 dx-\left(M[X]\right)^2=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx-\left(0\right)^2=\frac{1}{6}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{6}(1+1)=\frac{1}{3}$$

Найдем среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{\frac{1}{3}}\approx 0,577$.

д) Вычислим вероятность попадания в интервал $P\{-1/3\le X\le 1/2\}$.

$$P\{-1/3\le X\le 1/2\}=F(1/2)-F(-1/3)=\frac{1}{2}(1/2+1)-\frac{1}{2}\left(-1/3+1\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

е) Определим, квантилем какого порядка является точка $x_p=0$;

Для нахождения уровня квантиля необходимо решить уравнение

$$\int_{-\infty}^{x_p} f(x)dx=p$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} dx=\frac{1}{2}x\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}\left(0+1\right)=0,5$$

Получили $p=0,5$.

ж) Вычислим квантиль порядка $p=0,9$.

$$F(x_p)=p$$

$$F(x_{0,9})=0,9,$$

$$\frac{1}{2}\left(1+x_{0,9}\right)=0,9,$$

$$1+x_{0,9}=1,8,$$

$$x_{0,9}=0,8.$$