

Примеры решений на нормальный закон распределения

Задача. С.в. Y распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 2, и средним квадратическим отклонением, равным 1. Пусть $X = 2Y + 5$. Найдите вероятности $P(x > 10)$, $P(2 < x < 5)$, $P(x = 3)$.

Напишите функции плотности и распределения для X и постройте их графики. Как выглядит правило «трех сигм» для с.в. X ?

Решение. Найдем числовые характеристики величины X :

$$M(X) = M(2Y + 5) = 2M(Y) + 5 = 2 \cdot 2 + 5 = 9,$$

$$D(X) = D(2Y + 5) = 4D(Y) + 0 = 4 \cdot 1 + 0 = 4,$$

$$\sigma = \sigma(X) = 2.$$

Найдем вероятности $P(x > 10)$, $P(2 < x < 5)$, $P(x = 3)$. Используем формулу

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ - функция Лапласа.

$$P(X > 10) = P(10 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 9}{2}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 9}{2}\right) = \Phi(\infty) - \Phi(0,5) = \\ = 0,5 - 0,1915 = 0,3085.$$

$$P(2 < X < 5) = \Phi\left(\frac{5 - 9}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2 - 9}{2}\right) = \Phi(-2) - \Phi(-3,5) = \\ = -\Phi(2) + \Phi(3,5) = -0,4772 + 0,4998 = 0,0226.$$

$P(X = 3) = 0$, так как X - непрерывная случайная величина.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

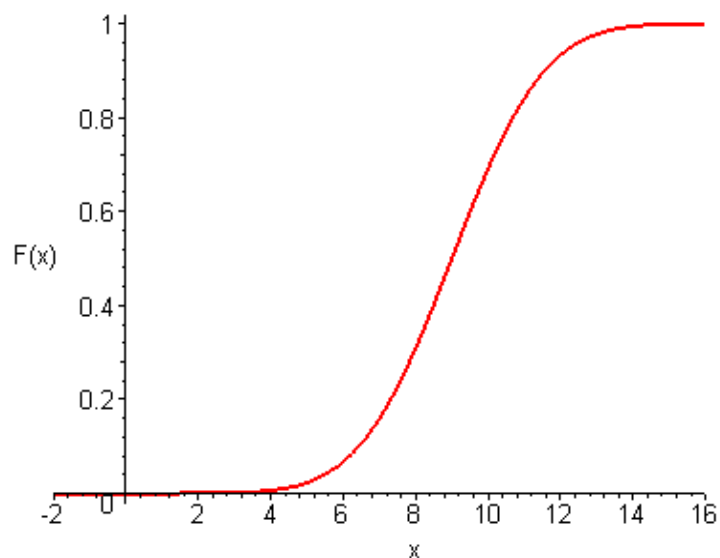
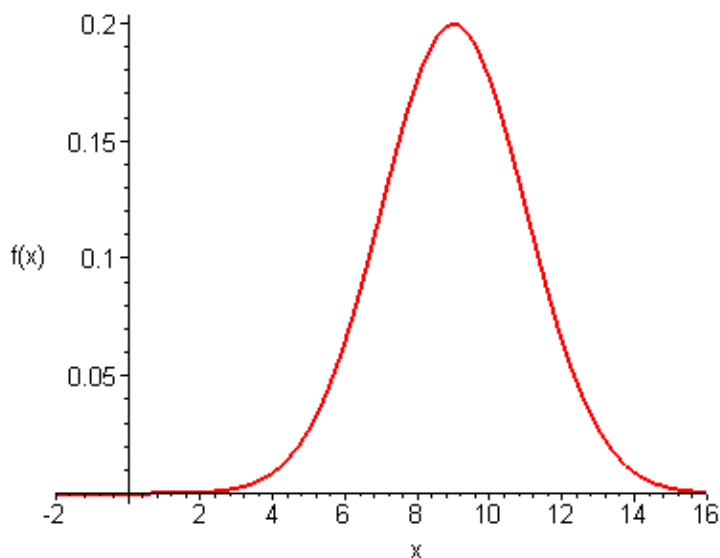
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-9)^2}{8}\right).$$

Функция распределения случайной величины X , данной в задаче, равна:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-9)^2}{8}\right) dt = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-9}{2}\right), \quad \text{где} \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz \quad - \quad \text{функция}$$

Лапласа.

Построим графики $f(x)$ и $F(x)$.



Запишем правило «трех сигм» для с.в. X :

$$P(a-3\sigma < X < a+3\sigma) = 0,9973,$$

$$P(9-6 < X < 9+6) = 0,9973,$$

$$P(3 < X < 15) = 0,9973.$$

Вероятность того, что X примет значения в интервале от 3 до 15 равна 0,9973.