

Решение задачи: закон распределения Пуассона

Задание. На автовокзале время прибытия автобусов различных рейсов объявляет дежурный. Появление информации о различных рейсах происходит случайной и независимо друг от друга. В среднем на автовокзал прибывает 5 рейсов каждые полчаса.

А) Составьте ряд распределения числа сообщений о прибытии автобусов в течение получаса.

Б) Найдите числовые характеристики этого распределения.

В) Запишите функцию распределения вероятностей и постройте ее график.

Г) Чему равна вероятность того, что в течение получаса придут не менее трех автобусов?

Д) Чему равна вероятность того, что в течение четверти часа не придет ни один автобус?

Решение.

А) Пусть случайная величина X = (Число сообщений о прибытии автобусов в течение получаса). Она распределена по закону Пуассона с параметром $a = 5$, вероятности

вычисляются по формуле $P(X = m) = P_n(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} = \frac{5^m}{m!} e^{-5}$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Составим ряд распределения (для нескольких первых значимых значений величины):

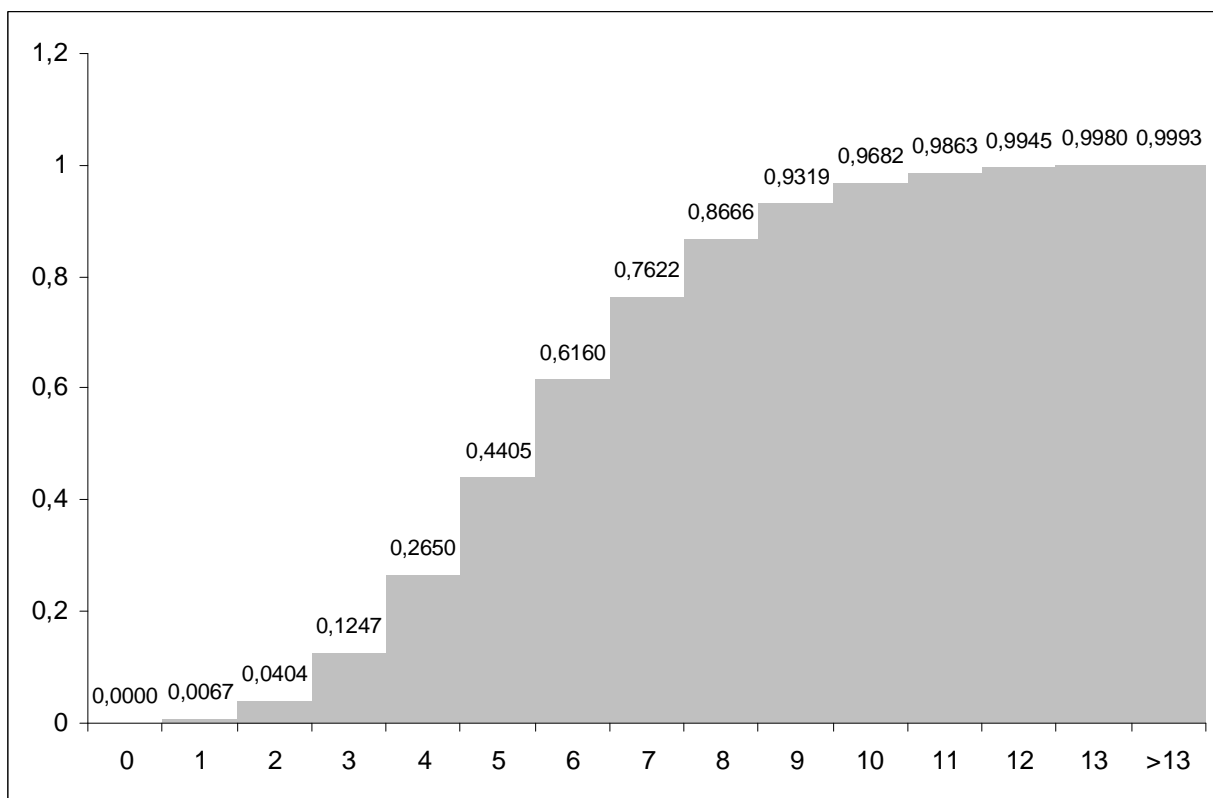
m	$P(X = m)$
0	0,00674
1	0,03369
2	0,08422
3	0,14037
4	0,17547
5	0,17547
6	0,14622
7	0,10444
8	0,06528
9	0,03627
10	0,01813
11	0,00824
12	0,00343
13	0,00132

Б) Найдем математическое ожидание $M(X) = a = 5$, дисперсию $D(X) = a = 5$, среднее квадратичное отклонение $\sigma(X) = \sqrt{a} = \sqrt{5} \approx 2,236$.

В) Найдем функцию распределения, $F(x) = P(X < x)$:

x от	x до	$F(x)$
$-\infty$	0	0
0	1	0,00674
1	2	0,04043
2	3	0,12465
3	4	0,26503
4	5	0,44049
5	6	0,61596
6	7	0,76218
7	8	0,86663
8	9	0,93191
9	10	0,96817
10	11	0,98630
11	12	0,99455
12	13	0,99798
13	$+\infty$	0,99930

График функции распределения (область под графиком закрашена для наглядности):



Г) Найдем вероятность того, что в течение получаса придут не менее трех автобусов:
 $P_1 = P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = 1 - 0,125 = 0,875$.

Д) Найдем вероятность того, что в течение четверти часа (половины получаса) не придет ни один автобус.

$$P_2 = P_{1/2}(0) = \frac{(5/2)^0}{0!} e^{-(5/2)} = e^{-(5/2)} \approx 0,082.$$