Решение задачи: система двух случайных величин

Задание. Совместная плотность вероятности системы двух случайных величин X и Y
$$f(x,y)=\frac{c}{36+9x^2+4y^2+x^2\cdot y^2}.$$

Найти величину c; определить законы распределения $F_1(x)$, $F_2(y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f(x/y)$; построить графики $F_1(x)$, $F_2(y)$; вычислить моменты m_x, m_y, D_x, D_y, K_{xy}.

Решение. Запишем плотность в виде:
$$f(x,y)=\frac{c}{36+9x^2+4y^2+x^2\cdot y^2}=\frac{c}{\left(y^2+9\right)\left(x^2+4\right)}.$$
Найдем C из условия нормировки: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=1$. Здесь за D мы для краткости обозначили область, на которой функция плотности распределения принимает ненулевые значения (в данном случае вся числовая плоскость).

Получаем:
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D \frac{c}{\left(4+x^2\right)\left(9+y^2\right)}dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{\left(4+x^2\right)\left(9+y^2\right)}dxdy=$$
$$=c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(9+y^2\right)}dy\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(4+x^2\right)}dx=c\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{3}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=$$
$$=c\cdot\frac{1}{6}\cdot\lim_{\substack{A\to\infty\\B\to-\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{A}{3}-\operatorname{arctg}\frac{B}{3}\right)\cdot\lim_{\substack{A\to\infty\\B\to-\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{A}{2}-\operatorname{arctg}\frac{B}{2}\right)=$$
$$=c\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=c\cdot\frac{\pi^2}{6}=1.$$
Отсюда находим $c=\dfrac{6}{\pi^2}$.

Получили: $f(x,y)=\dfrac{6}{\pi^2\left(y^2+9\right)\left(x^2+4\right)}$.

Найдем функцию плотности вероятности $f_1(x)$ величины X.
$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{6}{\pi^2\left(y^2+9\right)\left(x^2+4\right)}dy=\frac{2}{\pi^2\left(x^2+4\right)}\operatorname{arctg}\frac{y}{3}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=$$
$$=\frac{2}{\pi^2\left(x^2+4\right)}\lim_{\substack{A\to\infty\\B\to-\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{A}{3}-\operatorname{arctg}\frac{B}{3}\right)=\frac{2}{\pi\left(x^2+4\right)},\ x\in[-\infty;+\infty]$$

Найдем функцию плотности вероятности $f_2(y)$ величины Y.

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{6}{\pi^2\left(y^2+9\right)\left(x^2+4\right)}dx=\frac{3}{\pi^2\left(y^2+9\right)}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\bigg|_{-\infty}^{\infty}=$$

$$=\frac{3}{\pi^2\left(y^2+9\right)}\lim_{\substack{A\to\infty\\B\to-\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{A}{2}-\operatorname{arctg}\frac{B}{2}\right)=\frac{3}{\pi\left(y^2+9\right)},\ y\in[-\infty,+\infty]$$

Найдем функции распределения компонент.

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{2}{\pi\left(t^2+4\right)}dt=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\bigg|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\lim_{A\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{A}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}.$$

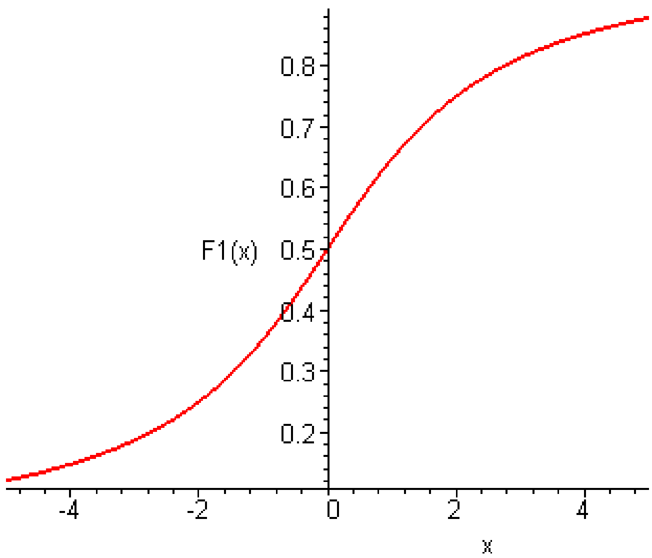
$$F_2(y)=\int_{-\infty}^{y} f_2(t)dt=\int_{-\infty}^{y}\frac{3}{\pi\left(t^2+9\right)}dt=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\bigg|_{-\infty}^{y}=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{3}-\lim_{A\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{A}{3}\right)=$$

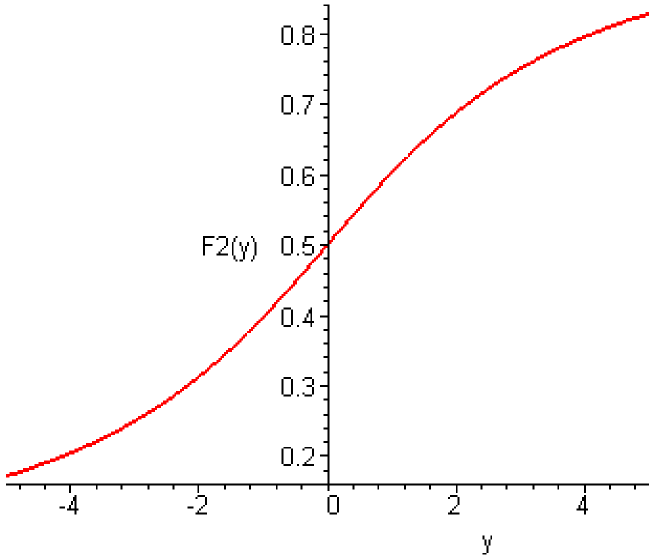
$$=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{3}.$$

Условная плотность распределения:

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{\dfrac{6}{\pi^2\left(y^2+9\right)\left(x^2+4\right)}}{\dfrac{3}{\pi\left(y^2+9\right)}}=\frac{2}{\pi\left(x^2+4\right)}=f_1(x).$$

Построим графики $F_1(x)$, $F_2(y)$.





Вычислим моменты m_x, m_y, D_x, D_y, K_{xy}.

Найдем математическое ожидание:
$m_X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)xdx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{4+x^2} = 0,$ (функция нечетная, интервал интегрирования симметричный)
Найдем дисперсию:
$$D_X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)x^2dx - (m_X)^2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{4+x^2} = \frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2+4-4}{4+x^2}dx = \frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}1dx - \frac{16}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{4+x^2} = \infty.$$

Аналогично,
$$m_Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(y)ydy = \frac{3}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{ydy}{9+y^2} = 0,$$
$$D_Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(y)y^2dy - (m_Y)^2 = \frac{3}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2dy}{9+y^2} = \frac{6}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{y^2+9-9}{9+y^2}dy = \frac{6}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}1dy - \frac{54}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dy}{9+y^2} = \infty.$$

Так как $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$, очевидно, что компоненты X, Y независимы, и $K_{XY} = 0$.