Двумерный непрерывный случайный вектор

Пример решения задачи

Задание. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, У)

$f = Ce^{-x^2-2xy-4y^2}$

Найти:

а) постоянный множитель С;

б) плотности распределения составляющих;

в) условные плотности распределения составляющих.

Решение. Найдем константу C из условия нормировки: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 1$, где $D = R^2$ - область, которой принадлежат все значения случайного вектора (X,Y). Получаем:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{R^2} Ce^{-x^2-2xy-4y^2}dxdy = C\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2xy-4y^2}dy =$$

$$= C\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{\frac{1}{4}x^2}erf\left(2y+\frac{1}{2}x\right)\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = C\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{\frac{1}{4}x^2}dx =$$

$$= C\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3}{4}x^2}dx = C\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}erf\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = C\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} = C\frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1,$$

Откуда $C = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$.

Здесь $erf(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$.

Найдем плотности распределения составляющих.

Найдем функцию плотности вероятности $f_x(x)$ величины X.

$$f_x(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2xy-4y^2}dy = \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2xy-4y^2}dy =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-x^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{\frac{1}{4}x^2}erf\left(2y+\frac{1}{2}x\right)\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-x^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{1}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{3}{4}x^2}, x \in (-\infty;+\infty).$$

Найдем функцию плотности вероятности $f_y(y)$ величины Y.

$$f_y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2xy-4y^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-4y^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2xy-x^2}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-4y^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{y^2}erf(x+y)\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-4y^2}\sqrt{\pi}e^{y^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}e^{-3y^2}, y \in (-\infty;+\infty).$$

Найдем условные плотности распределения составляющих.

$$\varphi(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-x^2-2xy-4y^2}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}e^{-3y^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2-2xy-y^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+y)^2}.$$

$$\varphi(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-x^2-2xy-4y^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{3}{4}x^2}}=\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}e^{-\frac{1}{4}x^2-2xy-4y^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}(x+4y)^2}.$$

Ответ:

а) C=

б))*

в) φ(φ(