

Решение транспортной задачи методом потенциалов

ЗАДАНИЕ. *Выполнить решение в программе QM for Windows*

Исходные данные.

$$\begin{pmatrix} 23 & 45 & 35 & 25 \\ 47 & 31 & 23 & 43 \\ 32 & 36 & 27 & 23 \end{pmatrix} \begin{matrix} 49 \\ 47 \\ 68 \end{matrix}$$

45 80 44 45

Числа в скобках – коэффициенты транспортных расходов, столбец чисел справа от матрицы – запасы груза у поставщиков, строка снизу – потребности потребителей.

1. Решить и проанализировать ТЗ без ограничений.
2. Решить ТЗ с запретом перевозки по самому выгодному пути (с наименьшими затратами).
3. Решить двухэтапную ТЗ с числом поставщиков – 3, складов – 2 и потребителей – 4, взяв за c_{ik} первых два столбца коэффициентов исходной матрицы, а за c_{kj} – последние две строки этой матрицы. Мощности складов одинаковы и равны половине суммарных запасов поставщиков, округлённых до целых десятков в большую сторону.

РЕШЕНИЕ.

1. Решаем задачу без ограничений.

Вводим данные.

Objective <input type="radio"/> Maximize <input checked="" type="radio"/> Minimize	Starting method Minimum Cost Method	Instruction Enter the demand at destination 4. Any non-negative permissible.			
(untitled)					
	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4	SUPPLY
Source 1	23	45	35	25	49
Source 2	47	31	23	43	47
Source 3	32	36	27	23	68
DEMAND	45	80	44	45	

Центральная часть таблицы – это тарифы по перевозке единицы груза от поставщика к потребителю. Последний столбец (SUPPLY) – запасы груза у поставщика, последняя строка (DEMAND) – спрос потребителя. Как видим, суммарный спрос равен 214, а суммарное предложение – 164 ед. груза. Начальный метод заполнения исходного решения – метод минимальной стоимости.

Решаем, смотрим таблицы результатов.

Оптимальный план перевозки груза

(untitled) Solution				
Optimal solution value = \$4128	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4
Source 1	45			4
Source 2		30	17	
Source 3			27	41
Dummy		50		

В этом окне отражены поставки груза в оптимальном решении ТЗ (от поставщиков к потребителям). В заголовке таблицы указано значение целевой функции в оптимальном решении (Optimal solution value = \$4128) – это минимальная стоимость по перевозке. Кроме того, в верхней части отчёта указан метод нахождения начального решения.

Отметим, что, как видно из приведённого отчёта, алгоритм решения задачи ввёл в рассмотрение дополнительного поставщика (последняя строка Dummy) с предложением, равным 50, неудовлетворенный спрос 2-го потребителя – 50, $(214-164=50)$.

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Как отмечалось, алгоритм решения ТЗ предусматривает равенство суммарного предложения и суммарного спроса и в случае нарушения этого условия вводятся либо фиктивный поставщик (как в нашем случае), либо фиктивный потребитель (если суммарное предложение больше суммарного спроса) с нулевыми тарифами.

Следующее окно – это оценки свободных клеток таблицы ТЗ в оптимальном решении.

(untitled) Solution				
	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4
Source 1		8	6	
Source 2	30			24
Source 3	11	1		
Dummy	14		8	12

Эти оценки являются аналогом двойственных оценок задачи ЛП и показывают, насколько изменится целевая функция, если в соответствующую клетку таблицы перераспределить поставку, равную единице.

Поскольку все оценки неотрицательны, то это и есть оптимальных план – любое его изменение не приведёт к уменьшению общих затрат по перевозке груза от поставщиков к потребителям. По этой же информации можно судить о числе оптимальных базисных решений – по числу нулевых оценок: в этом примере нет нулевых оценок, поэтому оптимальное решение одно.

2. Транспортная задача с ограничениями.

Смотрим таблицу

Objective <input type="radio"/> Maximize <input checked="" type="radio"/> Minimize	Starting method Minimum Cost Method	Instruction Enter the demand at destination 4. Any non-negative permissible.			
(untitled)					
	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4	SUPPLY
Source 1	23	45	35	25	49
Source 2	47	31	23	43	47
Source 3	32	36	27	23	68
DEMAND	45	80	44	45	

Наименьшие затраты у нас 23.

Предположим, что 1-й поставщик и 1-й потребитель не связаны между собой прямым маршрутом и поставка между ними не возможна. Для решения задачи в таком виде для запрета поставки между поставщиками и потребителями вводятся «запретительные» тарифы. По сути это «большие» тарифы и алгоритм ТЗ поставку в эту клетку не осуществит, т.к. он нацелен на минимизацию целевой функции. В нашем случае c_{11} поставим равным 999.

Новая таблица.

Objective <input type="radio"/> Maximize <input checked="" type="radio"/> Minimize	Starting method Minimum Cost Method	Instruction Enter the cost of shipping one unit from source 1 to c Any real value is permissible.			
(untitled)					
	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4	SUPPLY
Source 1	999	45	35	25	49
Source 2	47	31	23	43	47
Source 3	32	36	27	23	68
DEMAND	45	80	44	45	

Тогда решение задачи с изменённым тарифом примет вид.

(untitled) Solution				
Optimal solution value = \$4647	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4
Source 1			4	45
Source 2		30	17	
Source 3	45		23	
Dummy		50		

Как видим, клетка (1.1) пуста, т.е. поставка в эту клетку отсутствует, а значение целевой функции увеличилось на $4647 - 4128 = 499$ за счёт перераспределения поставок по менее выгодным маршрутам.

3. Двухэтапная транспортная задача

Предположим, что груз непосредственно между поставщиками и потребителями не может. Его сначала нужно завезти на склады, а затем со складов развезти потребителям. В этом случае имеем двухэтапную ТЗ – на первом этапе завезти груз на склады, а на втором – развезти груз со складов потребителям.

Решим двухэтапную ТЗ с числом поставщиков – 3, складов – 2 и потребителей – 4, взяв за c_{ik} первых два столбца коэффициентов исходной матрицы, а за c_{kj} – последние две строки этой матрицы.

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 23 & 45 \\ 47 & 31 \\ 32 & 36 \end{pmatrix} \text{ и } c_{kj} = \begin{pmatrix} 47 & 31 & 23 & 43 \\ 32 & 36 & 27 & 23 \end{pmatrix}.$$

Мощности складов одинаковы и равны половине суммарных запасов поставщиков, округлённых до целых десятков в большую сторону = $(49+47+68)/2 = 82 \approx 90$.

Исходные данные.

$$\begin{pmatrix} 23 & 45 & 35 & 25 \\ 47 & 31 & 23 & 43 \\ 32 & 36 & 27 & 23 \end{pmatrix} \begin{matrix} 49 \\ 47 \\ 68 \end{matrix}$$

45 80 44 45

Тогда таблица двухэтапной ТЗ примет вид.

Objective		Starting method		Instruction			
<input type="radio"/> Maximize <input checked="" type="radio"/> Minimize		Minimum Cost Method		Enter the demand at destination 6. Any non-negative value is p			
(untitled)							
	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4	Destination 5	Destination 6	SUPPLY
Source 1	23	45	999	999	999	999	49
Source 2	47	31	999	999	999	999	47
Source 3	32	36	999	999	999	999	68
Source 4	0	999	47	31	23	43	90
Source 5	999	0	32	36	27	23	90
DEMAND	90	90	45	80	44	45	

Здесь структура модели следующая.

Первый блок коэффициентов (три источника и два пункта назначения – верхние левые три строки и два столбца) – это ТЗ по перевозке груза от поставщиков на склады, следующие 4 столбца (у первых трёх строк) – это как бы поставки груза со складов потребителям, клетки заполнены запретительными тарифами (эти поставки запрещены).

Следующие две строки таблицы (Source 4 и Source 5) – это связи складов самих с собой и с потребителями. Первые два столбца – это связи складов самих с собой. Между разными складами связи запрещены – стоят запретительные тарифы, связи складов самих с собой отмечены нулевыми тарифами – поставки не производятся. Это грузы, которые якобы остаются на складах, а на самом деле – мощности складов, не используемые в решении задачи. Диагональ с нулевыми тарифами называется фиктивной. Следующие 4 столбца в этих двух строках – это поставки груза со складов потребителям.

Решение данной задачи следующее.

(untitled) Solution						
Optimal solution value = \$9269	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4	Destination 5	Destination 6
Source 1	49					
Source 2		47				
Source 3	41	27				
Source 4				46	44	
Source 5		16	29			45
Dummy			16	34		

Получили, что от поставщиков на склады груз развезли так: 49 ед. груза от первого поставщика перевезли на первый склад, 47 ед. груза от второго поставщика перевезли на второй склад, 41 ед. груза от третьего поставщика перевезли на первый склад, 27 ед. груза от третьего поставщика перевезли на второй склад

Второй склад загружен не полностью, что отражено в фиктивной диагонали – 16 ед. груза на пересечении Source 5 и Destination 2 (это связь второго склада самого с собой).

В последних двух строках (начиная со столбца Destination 3) отражены перевозки груза со складов потребителям.

С 1 склада перевозим – 46 ед. груза к 2-му потребителю, 44 ед. груза к 3-му потребителю.

Со 2 склада перевозим – 29 ед. груза к 1-му потребителю, 45 ед. груза к 4-му потребителю.

Суммарная оптимальная стоимость этих перевозок показана в заголовке таблицы – 9269.

Спрос 1-го потребителя не удовлетворен на 16 ед.

Спрос 2-го потребителя не удовлетворен на 34 ед.