Рекуррентные соотношения
Пример решения

ЗАДАНИЕ.

Решить рекуррентное соотношение с начальными условиями и сделать проверку

$f(n+2)=2f(n+1)+3f(n)-3^n \quad f(0)=1, f(1)=3$

РЕШЕНИЕ.

Перепишем соотношение в виде $f(n+2)-2f(n+1)-3f(n)-3^n$

Решим сначала однородное соотношение $f(n+2)-2f(n+1)-3f(n)=0$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2-2\lambda-3=0$$
$$\lambda=\frac{2\pm\sqrt{2^2+4*3}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}$$
$$\lambda_1=3, \lambda_2=-1$$

Значит, $f(n)=A\cdot(-1)^n+B\cdot 3^n$

Так как 3 является решением характеристического уравнения кратности 1, поэтому частное решение для -3^n будем искать в виде $f=An3^n$, тогда получаем

$$f(n)=An3^n$$
$$f(n+1)=A(n+1)3^{n+1}=A(3n+3)3^n$$
$$f(n+2)=A(n+2)3^{n+2}=A(9n+18)3^n$$
$$f(n+2)-2f(n+1)-3f(n)=A(9n+18)3^n-2A(3n+3)3^n-3An3^n=A3^n(9n+18-6n-6-3n)=$$
$$=12A3^n=-3^n \Rightarrow A=-\frac{1}{12}$$

Значит, общее решение есть $f(n)=A\cdot(-1)^n+B\cdot 3^n-\frac{n}{12}3^n$

Найдем коэффициенты A, B

$$f(0) = A\cdot(-1)^0 + B\cdot 3^0 - \frac{0}{12}3^0 = A + B = 1$$

$$f(1) = A\cdot(-1)^1 + B\cdot 3^1 - \frac{1}{12}3^1 = -A + 3B - \frac{1}{4} = 3$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 3B - \frac{1}{4} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ 4B - \frac{1}{4} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ 4B = \frac{17}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{16} \\ B = \frac{17}{16} \end{cases}$$

Тогда, получаем

$$f(n) = -\frac{1}{16}(-1)^n + \frac{17}{16}\cdot 3^n - \frac{n}{12}3^n$$

Проверим данное решение

$$f(n+2) - 2f(n+1) - 3f(n) = \left[-\frac{1}{16}(-1)^{n+2} + \frac{17}{16}\cdot 3^{n+2} - \frac{n+2}{12}3^{n+2}\right] - 2\left[-\frac{1}{16}(-1)^{n+1} + \frac{17}{16}\cdot 3^{n+1} - \frac{n+1}{12}3^{n+1}\right] -$$

$$-3\left[-\frac{1}{16}(-1)^n + \frac{17}{16}\cdot 3^n - \frac{n}{12}3^n\right] =$$

$$= (-1)^n\left[-\frac{1}{16} - \frac{2}{16} + \frac{3}{16}\right] + 3^n\left(\frac{17*9}{16} - 9\frac{n+2}{12} - \frac{17*3}{8} + \frac{2(n+1)}{12}3 - \frac{51}{16} + \frac{3n}{12}\right) = 0$$

Значит, решение найдено верно

Проверим начальные условия

$$f(0) = -\frac{1}{16}(-1)^0 + \frac{17}{16}\cdot 3^0 - \frac{0}{12}3^0 = 1$$

$$f(1) = -\frac{1}{16}(-1)^1 + \frac{17}{16}\cdot 3^1 - \frac{1}{12}3^1 = 3$$