Тема: Случайные процессы

Задание. *На вход интегрирующего устройства поступает случайный процесс $X(t)$ с характеристиками:*

$$m_X(t) = t^2 - 5, \quad K_X(t_1, t_2) = 2\sin 3t_1 \sin 3t_2.$$

Найти $m_Y(t)$, $K_Y(t_1, t_2)$, $D_Y(t)$, если $Y(t) = t^2 \int\limits_0^t X(\tau)\,d\tau + 3t$.

Решение. Обозначим $Z(t) = \int\limits_0^t X(\tau)\,d\tau$, тогда $Y(t) = t^2 Z(t) + 3t$. Найдем сначала характеристики случайного процесса $Z(t)$.

$$m_Z(t) = \int\limits_0^t m_X(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t (\tau^2 - 5)\,d\tau = \left(\frac{\tau^3}{3} - 5\tau\right)\Big|_0^t = \frac{t^3}{3} - 5t.$$

$$K_Z(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} K_X(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} 2\sin 3\tau_1 \sin 3\tau_2\,d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= 2\int\limits_0^{t_1} \sin 3\tau_1\,d\tau_1 \cdot \int\limits_0^{t_2} \sin 3\tau_2\,d\tau_2 = \frac{2}{9}\cos 3\tau_1\Big|_0^{t_1} \cdot \cos 3\tau_2\Big|_0^{t_2} = \frac{2}{9}(\cos 3t_1 - 1)(\cos 3t_2 - 1).$$

$$D_Z(t) = K_Z(t, t) = \frac{2}{9}(\cos 3t - 1)^2.$$

Теперь найдем характеристики $Y(t) = t^2 Z(t) + 3t$. Математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$:

$$m_Y(t) = M\left(t^2 Z(t) + 3t\right) = t^2 m_Z(t) + 3t = \frac{t^5}{3} - 5t^3 + 3t.$$

Корреляционная функция случайного процесса $Y(t)$:

$$K_Y(t_1, t_2) = K\left(t^2 Z(t) + 3t\right) = t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot K_Z(t_1, t_2) + 0 = \frac{2}{9} t_1^2 t_2^2 (\cos 3t_1 - 1)(\cos 3t_2 - 1).$$

Дисперсия случайного процесса $Y(t)$:

$$D_Y(t) = K_Y(t, t) = \frac{2}{9} t^4 (\cos 3t - 1)^2.$$