Решение задачи об эквивалентности формул

Задача. *Используя приведенные ниже (основные) эквивалентности и соотношения, доказать эквивалентность формул* U *и* B*:*
1) $U=(\bar{x}\to y)\to(\bar{x}\cdot y\sim(x\oplus y))$, $B=(\overline{x\cdot y}\to x)\to y$.

Решение. Упрощаем формулы.

$$U=(\bar{x}\to y)\to(\bar{x}\cdot y\sim(x\oplus y))=\overline{(\bar{\bar{x}}\vee y)}\vee(\bar{x}\cdot y\sim((x\,\&\,\bar{y})\vee(\bar{x}\,\&\,y)))=$$

$$=\overline{(x\vee y)}\vee\Big(\big(\bar{x}\cdot y\cdot((x\cdot\bar{y})\vee(\bar{x}\cdot y))\big)\vee\big(\overline{\bar{x}\cdot y}\cdot\overline{((x\cdot\bar{y})\vee(\bar{x}\cdot y))}\big)\Big)=$$

$$=\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\left(\big((\bar{x}\cdot y\cdot x\cdot\bar{y})\vee(\bar{x}\cdot y\cdot\bar{x}\cdot y)\big)\vee\Big((\bar{\bar{x}}\vee\bar{y})\cdot\big(\overline{(x\cdot\bar{y})}\cdot\overline{(\bar{x}\cdot y)}\big)\Big)\right)=$$

$$=\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\Big(\big(0\vee(\bar{x}\cdot y)\big)\vee\big((x\vee\bar{y})\cdot(\bar{x}\vee\bar{\bar{y}})\cdot(\bar{\bar{x}}\vee\bar{y})\big)\Big)=$$

$$=\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\Big(\big(\bar{x}\cdot y\big)\vee\big((x\vee\bar{y})\cdot(\bar{x}\vee y)\cdot(x\vee\bar{y})\big)\Big)=$$

$$=\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\big(\bar{x}\cdot y\vee(x\vee\bar{y})\cdot(\bar{x}\vee y)\big)=\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\big(\bar{x}\cdot y\vee(x\cdot y)\vee(\bar{x}\cdot\bar{y})\big)=$$

$$=\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}\cdot y\vee x\cdot y=\bar{x}\vee x\cdot y=\bar{x}\vee y.$$

$$B=(\overline{x\cdot y}\to x)\to y=\overline{(\overline{\overline{x\cdot y}}\vee x)}\vee y=\overline{(x\cdot y\vee x)}\vee y=\overline{(x)}\vee y=\bar{x}\vee y.$$

Верно.

2) $U=(x\cdot y\vee(\bar{x}\to y\cdot z))\sim((\bar{x}\to\bar{y})\to z)$, $B=(x\to y)\oplus(y\oplus z)$

Решение. Упрощаем формулы.

$$U=(x\cdot y\vee(\bar{x}\to y\cdot z))\sim((\bar{x}\to\bar{y})\to z)=$$

$$=\Big((x\cdot y\vee(\bar{x}\to y\cdot z))\cdot((\bar{x}\to\bar{y})\to z)\Big)\vee\Big(\overline{(x\cdot y\vee(\bar{x}\to y\cdot z))}\cdot\overline{((\bar{x}\to\bar{y})\to z)}\Big)=$$

$$=\Big((x\cdot y\vee(\bar{\bar{x}}\vee y\cdot z))\cdot(\overline{(\bar{\bar{x}}\vee\bar{y})}\vee z)\Big)\vee\Big(\overline{(x\cdot y\vee(\bar{\bar{x}}\vee y\cdot z))}\cdot\overline{(\overline{(\bar{\bar{x}}\vee\bar{y})}\vee z)}\Big)=$$

$$=\Big((x\cdot y\vee(x\vee y\cdot z))\cdot(\overline{(x\vee\bar{y})}\vee z)\Big)\vee\Big(\overline{(x\cdot y\vee(x\vee y\cdot z))}\cdot\overline{(\overline{(x\vee\bar{y})}\vee z)}\Big)=$$

$$=\Big((x\cdot y\vee x\vee y\cdot z)\cdot(\bar{x}\cdot\bar{\bar{y}}\vee z)\Big)\vee\Big(\overline{(x\cdot y\vee x\vee y\cdot z)}\cdot\overline{(\bar{x}\cdot\bar{\bar{y}}\vee z)}\Big)=$$

$$=\Big((x\vee y\cdot z)\cdot(\bar{x}\cdot y\vee z)\Big)\vee\Big(\overline{(x\vee y\cdot z)}\cdot\overline{(\bar{x}\cdot y\vee z)}\Big)=$$

$$=\Big((x\vee y\cdot z)\cdot(\bar{x}\cdot y\vee z)\Big)\vee\Big(\bar{x}\cdot\overline{y\cdot z}\cdot\overline{\bar{x}\cdot y}\cdot\bar{z}\Big)=$$

$$=\Big((x\cdot(\bar{x}\cdot y\vee z)\vee y\cdot z\cdot(\bar{x}\cdot y\vee z))\Big)\vee\Big(\bar{x}\cdot(\bar{y}\vee\bar{z})\cdot(\bar{\bar{x}}\vee\bar{y})\cdot\bar{z}\Big)=$$

$$=\Big(x\cdot\bar{x}\cdot y\vee x\cdot z\vee y\cdot z\cdot\bar{x}\cdot y\vee y\cdot z\cdot z\Big)\vee\Big((\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}\cdot\bar{z})\cdot(x\vee\bar{y})\cdot\bar{z}\Big)=$$

$$=\Big(0\vee x\cdot z\vee y\cdot z\cdot\bar{x}\vee y\cdot z\Big)\vee\Big((\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}\cdot\bar{z})\cdot(x\cdot\bar{z}\vee\bar{y}\cdot\bar{z})\Big)=$$

$$=\Big(x\cdot z\vee y\cdot z\Big)\vee\Big(((\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}\cdot\bar{z})\cdot x\cdot\bar{z}\vee(\bar{x}\cdot\bar{y}\vee\bar{x}\cdot\bar{z})\cdot\bar{y}\cdot\bar{z})\Big)=$$

$$=\Big(x\cdot z\vee y\cdot z\Big)\vee\Big(\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot x\cdot\bar{z}\vee\bar{x}\cdot\bar{z}\cdot x\cdot\bar{z}\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\vee\bar{x}\cdot\bar{z}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\Big)=$$

$$=\Big(x\cdot z\vee y\cdot z\Big)\vee\Big(0\vee 0\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\vee\bar{x}\cdot\bar{z}\cdot\bar{y}\Big)=$$

$$=x\cdot z\vee y\cdot z\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}.$$

$$B=(x\to y)\oplus(y\oplus z)=\Big((x\to y)\cdot\overline{(y\oplus z)}\Big)\vee\Big(\overline{(x\to y)}\cdot(y\oplus z)\Big)=$$

$$=\Big((\bar{x}\vee y)\cdot(y\sim z)\Big)\vee\Big(\overline{(\bar{x}\vee y)}\cdot(y\cdot\bar{z}\vee\bar{y}\cdot z)\Big)=$$

$$=\Big((\bar{x}\vee y)\cdot(y\cdot z\vee\bar{y}\cdot\bar{z})\Big)\vee\Big((\bar{\bar{x}}\cdot\bar{y})\cdot(y\cdot\bar{z}\vee\bar{y}\cdot z)\Big)=$$

$$=\Big(((\bar{x}\vee y)\cdot y\cdot z\vee(\bar{x}\vee y)\cdot\bar{y}\cdot\bar{z})\Big)\vee\Big((x\cdot\bar{y})\cdot(y\cdot\bar{z}\vee\bar{y}\cdot z)\Big)=$$

$$=\Big(((\bar{x}\vee y)\cdot y\cdot z\vee(\bar{x}\vee y)\cdot\bar{y}\cdot\bar{z})\Big)\vee\Big((x\cdot\bar{y}\cdot y\cdot\bar{z}\vee x\cdot\bar{y}\cdot\bar{y}\cdot z)\Big)=$$

$$=\Big(\bar{x}\cdot y\cdot z\vee y\cdot y\cdot z\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\vee y\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\Big)\vee\Big(0\vee x\cdot\bar{y}\cdot z\Big)=$$

$$=\Big(\bar{x}\cdot y\cdot z\vee y\cdot z\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\vee 0\Big)\vee x\cdot\bar{y}\cdot z=$$

$$=y\cdot z\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\vee x\cdot\bar{y}\cdot z=y\cdot z\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\vee x\cdot\bar{y}\cdot z=$$

$$=\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\vee z\cdot(x\cdot\bar{y}\vee y)=\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\vee z\cdot(x\vee y)=x\cdot z\vee y\cdot z\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}.$$

Верно.

Основные эквивалентности:

1. $x \circ y = y \circ x$ - коммутативность связки $\circ$, где символ $\circ$ является общим обозначением для связок $\&, \vee, \oplus, \sim, |, \downarrow$.
2. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ - ассоциативность связки $\circ$, где символ $\circ$ является общим обозначением для связок $\&, \vee, \oplus, \sim$.
3. а) $x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$ - дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции.
б) $x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$ - дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.
в $x \& (y \oplus z) = (x \& y) \oplus (x \& z)$ - дистрибутивность конъюнкции относительно сложения по модулю 2.
4. а) $\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}$, б) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$ (правила де Моргана).
5. а) $x \vee (x \& y) = x$, б) $x \& (x \vee y) = x$ (правила поглощения).
6. а) $x \vee (\overline{x} \& y) = x \vee y$, б) $x \& (\overline{x} \vee y) = x \& y$.
7. а) $x \& \overline{x} = x \& 0 = x \oplus x = 0$,
б) $x \vee \overline{x} = x \vee 1 = x \sim x = x \to x = 1$,
в) $x \vee x = x \& x = x \& 1 = x \vee 0 = x \oplus 0 = x$,
г) $x \oplus 1 = x \to 0 = x \sim 0 = x | x = x \downarrow x = \overline{x}$,
д) $\overline{\overline{x}} = x$.
8. а) $x \oplus y = (x \& \overline{y}) \vee (\overline{x} \& y) = (x \vee y) \& (\overline{x} \vee \overline{y})$,
б) $x \sim y = \overline{x \oplus y} = (x \& y) \vee (\overline{x} \& \overline{y}) = (x \vee \overline{y}) \& (\overline{x} \vee y)$,
в) $x \to y = \overline{x} \vee y = ((x \& y) \oplus x) \oplus 1$.
9. а) $x | y = \overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}$, б) $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$.

1) $x \vee y = (x \to y) \to y$
2) $x \sim y = (x \to y) \& (y \to x)$
3) $x \downarrow y = \big((x | x) | (y | y)\big) | \big((x | x) | (y | y)\big)$
4) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$
5) $x \& (y \sim z) = \big((x \& y) \sim (x \& z)\big) \sim x$
6) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$
7) $x \vee (y \to z) = (x \vee y) \to (x \vee z)$
8) $x \& (y \to z) = (x \to y) \to (x \& z)$
9) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$
10) $x \to (y \& z) = (x \to y) \& (x \to z)$
11) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$