Линейные подпространства

Пример решения задачи по алгебре

Задача. *Образует ли линейное подпространство пространства* R^4 *множество* V, *заданное по правилу:*

а) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1-2x_3=0\}$;

б) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_3+x_4=1\}$.

Решение

а) Если $x_1-2x_3=0$ или $x_1=2x_3$, то $V=\{(2x_3,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\}$.

Возьмем произвольные элементы множества V $x=(2x_3,x_2,x_3,x_4)$, $y=(2y_3,y_2,y_3,y_4)$.

Тогда $x+y=(2(x_3+y_3),\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ x_4+y_4)\in R^4$, $\lambda x=(2\lambda x_3,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3,\ \lambda x_4)\in R^4$.

Выполнение свойств R^4 очевидно, так как векторы $x+y,\ \lambda x\in R^4$.

Следовательно, множество V является линейным подпространством пространства R^4.

б) Если $x_3+x_4=1$ или $x_3=1-x_4$, то $V=\{x_1,x_2,1-x_4,x_4\}$.

Возьмем произвольные элементы множества V:

$x=(x_1,x_2,1-x_4,x_4)$, $y=(y_1,y_2,1-y_4,y_4)$.

Тогда $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,1-x_4+1-y_4,x_4+y_4)\notin V$, так как для третьей координаты элемента $x+y$ не выполняется заданное для множества V правило: $1-x_4+1-y_4\neq 1-(x_4+y_4)$

Следовательно, множество V не является линейным подпространством пространства R^4.