

Тема: Линейное программирование

ЗАДАНИЕ. Колхоз имеет возможность приобрести не более 19 трехтонных автомашин и не более 17 пятитонных. Отпускная цена трехтонного грузовика - 4000 руб., пятитонного - 5000 руб. Колхоз может выделить для приобретения автомашин 141 тысяча рублей. Сколько нужно приобрести автомашин, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?

Задачу решить графическими и аналитическими методами.

РЕШЕНИЕ. Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 – количество трехтонных автомашин, x_2 – количество пятитонных автомашин. По условию $0 \leq x_1 \leq 19$, $0 \leq x_2 \leq 17$. На приобретение грузовиков необходима сумма $4000x_1 + 5000x_2$, при этом по условию она не должна превосходить 141 000, т.е. $4000x_1 + 5000x_2 \leq 141000$. Теперь введем целевую функцию – грузоподъемность автомашин, которая составляет $3x_1 + 5x_2$.

Таким образом, задача заключается в следующем: максимизировать целевую функцию

$$f = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

при ограничениях

$$4000x_1 + 5000x_2 \leq 141000, \quad (*)$$

$$0 \leq x_1 \leq 19, 0 \leq x_2 \leq 17. \quad (**)$$

Решим эту задачу симплекс-методом. Приведем задачу к каноническому виду, введя 3 дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 :

$$f = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \max$$

$$4000x_1 + 5000x_2 + x_3 = 141000,$$

$$x_1 + x_4 = 19,$$

$$x_2 + x_5 = 17,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

В качестве опорного плана выберем $X_0 = (0, 0, 141000, 19, 17)$. Составим симплекс-таблицу.

Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i/a_{ij}
x_3	141000	4000	5000	1	0	0	28,20
x_4	19	1	0	0	1	0	
x_5	17	0	1	0	0	1	17
f	0	-3	-5	0	0	0	

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой, а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к коэффициентам столбца (последний столбец). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять жирным). Аналогично будем повторять шаги, пока не придем к таблице с неотрицательными оценками.

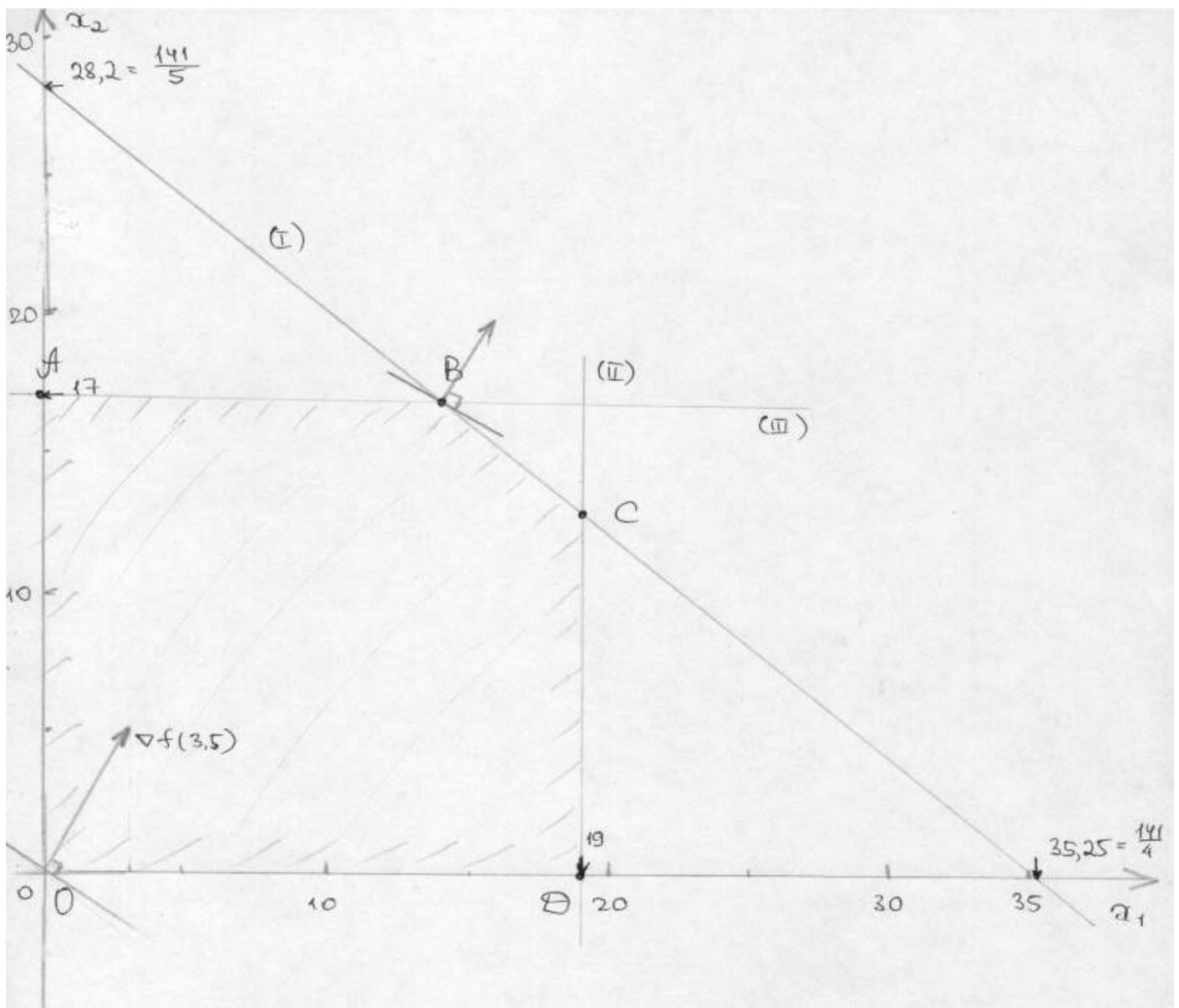
Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i/a_{ij}
x_3	56000	4000	0	1	0	-5000	14,00
x_4	19	1	0	0	1	0	19,00
x_2	17	0	1	0	0	1	
f	85	-3	0	0	0	5	

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5
x1	14	1	0	1/4000	0	-5/4
x4	5	0	0	-1/4000	1	5/4
x2	17	0	1	0	0	1
f	127	0	0	3/4000	0	5/4

В последнем плане строка f не содержит отрицательных значений, план $x_1 = 14$, $x_2 = 17$ оптимален, целевая функция принимает значение 127 (тонн).

Теперь решим эту же задачу графическим методом. Построим область допустимых решений задачи, ограниченную прямыми:

$$4000x_1 + 5000x_2 = 141000, \quad (I) \quad x_1 = 19, \quad (II) \quad x_2 = 17. \quad (III)$$



Множество точек, определяемых неравенствами (*), (***) – многоугольник ABCDO, в одной из вершин которого достигается максимум функции. Построим линию уровня $3x_1 + 5x_2 = 0$ и

вектор градиента $(3, 5)$. Будем передвигать линию уровня, пока не выйдем из многоугольника, что произойдет в точке В с координатами $(14, 17)$. В этой точке функция принимает максимальное значение 127. Чтобы достичь этого значения грузоподъемности, нужно приобрести 14 трехтонных грузовиков и 17 пятитонных.