Тема: аналитическая геометрия на плоскости

Задание. *Даны вершины треугольника A (-2, 1), B (3, 3), C (1, 0). Найти:*
а) длину стороны AB;
б) уравнение медианы BM;
в) cos угла BCA;
г) уравнение высоты CD;
д) длину высоты CD;
е) площадь треугольника ABC.

Решение.

А) Уравнение стороны AB:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A},$$

$$\frac{x+2}{3+2}=\frac{y-1}{3-1},$$

$$\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{2},$$

$$2x+4=5y-5,$$

$$2x-5y+9=0.$$

Б) Найдем середину стороны AC, точку M:

$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$, $y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$. Получаем $M(-0,5;0,5)$.

Найдем уравнение медианы BM.

$$\frac{x-x_B}{x_M-x_B}=\frac{y-y_B}{y_M-y_B},$$

$$\frac{x-3}{-0,5-3}=\frac{y-3}{0,5-3},$$

$$\frac{x-3}{-3,5}=\frac{y-3}{-2,5},$$

$$\frac{x-3}{7}=\frac{y-3}{5},$$

$$5x-15=7y-21,$$

$$5x-7y+6=0.$$

в) Найдем cos угла BCA. Для этого найдем координаты векторов:

$$\overline{CB}=\{3-1,3-0\}=\{2,3\},$$

$$\overline{CA}=\{-2-1,1-0\}=\{-3,1\}.$$

Тогда $\cos BCA=\frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{\left|\overline{CB}\right|\cdot\left|\overline{CA}\right|}=\frac{2\cdot(-3)+3\cdot 1}{\sqrt{4+9}\sqrt{9+1}}=\frac{-3}{\sqrt{13}\sqrt{10}}=\frac{-3}{\sqrt{130}}$.

г) Найдем уравнение высоты CD. Она перпендикулярна стороне AB с угловым коэффициентом $k_{AB}=\frac{2}{5}$, поэтому ее уравнение имеет вид:

$$y-y_C=-\frac{1}{k_{AB}}(x-x_C),$$

$$y-0=-\frac{5}{2}(x-1),$$

$$y=-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}.$$

д) Найдем длину высоты CD. Длина высоты – это фактически расстояние от точки C(1,0) до прямой AB: $2x-5y+9=0$, то есть

$$CD=\frac{|2x_C-5y_C+9|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\frac{|2\cdot 1-5\cdot 0+9|}{\sqrt{4+25}}=\frac{11}{\sqrt{29}}.$$

е) Найдем площадь треугольника ABC по формуле $S=\frac{1}{2}|\Delta|$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_A & x_B & x_C\\ y_A & y_B & y_C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-3+1-9=-11.$$

Таким образом, площадь $S=\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{11}{2}=5,5$.