

Функции нескольких переменных Касательная плоскость и нормаль

ЗАДАНИЕ.

Найти градиент, первый дифференциал, матрицу вторых производных, второй дифференциал функции $z = 2xy - xy^4 + 5y^3 - 3$ в точке $A(2; -3)$.

Составить уравнения касательной плоскости и соприкасающегося параболоида к графику данной функции.

РЕШЕНИЕ.

Найдем градиент

$$\text{grad}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right) = (2y - y^4; 2x - 4xy^3 + 15y^2)$$

$$\text{grad}z(A) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(A); \frac{\partial z}{\partial y}(A) \right) = (2(-3) - (-3)^4; 2*2 - 4*2*(-3)^3 + 15(-3)^2) = (-87; 445)$$

Первый дифференциал равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2y - y^4) dx + (2x - 4xy^3 + 15y^2) dy$$

$$dz(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A) dx + \frac{\partial z}{\partial y}(A) dy = -87 dx + 445 dy$$

Найдем вторые производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12xy^2 + 30y; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2 - 4y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(A) = 0; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(A) = -12*2*(-3)^2 + 30*(-3) = -306$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(A) = 2 - 4(-3)^3 = 110$$

Матрица вторых производных есть

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 - 4y^3 \\ 2 - 4y^3 & -12xy^2 + 30y \end{pmatrix}$$

$$\Delta(A) = \begin{pmatrix} 0 & 110 \\ 110 & -306 \end{pmatrix}$$

Второй дифференциал

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 2(2 - 4y^3) dx dy + (-12xy^2 + 30y) dy^2$$

$$d^2 z(A) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 220 dx dy - 306 dy^2$$

Уравнение касательной плоскости есть

$$z(2; -3) = 2 * 2 * (-3) - 2(-3)^4 + 5(-3)^3 - 3 = -312$$

$$-87(x - 2) + 445(y + 3) + (z + 312) = 0$$

$$-87x + 445y + z + 1821 = 0$$

Составим уравнение соприкасающегося параболоида

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} xy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} y^2 \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} (0x^2 + 2 * 220xy - 306y^2) = 0$$

$$220xy - 153y^2 = 0$$