Теория поля
Типовой расчет

ЗАДАНИЕ.

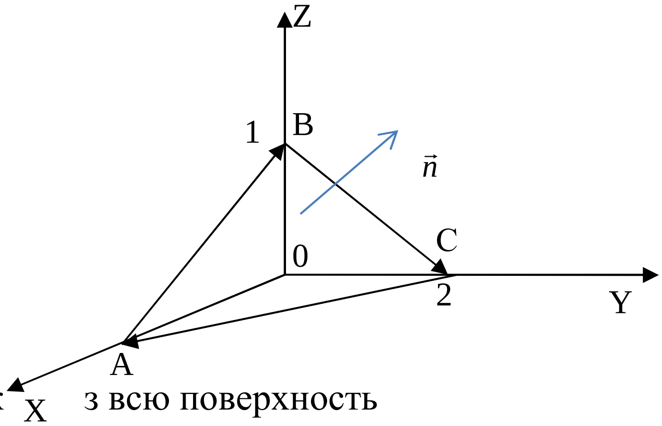
А) Найти поток векторного поля F через внешнюю поверхность пирамиды, отсекаемой плоскостью (р) двумя способами: непосредственно и по формуле Гаусса-Остроградского.

Б) Найти циркуляцию вектора Fо контуру треугольника двумя способами: по определению и по формуле Стокса.

$\vec{F} = z\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k}$,2x+y+2z=2

РЕШЕНИЕ.

Сделаем схематический чертеж



1) Полный поток з всю поверхность

По формуле Гаусса: $П = \iiint\limits_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$

$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$

Тогда

$$\Pi_{полн} = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_0^{1-x-y/2} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} (1-x-\frac{y}{2})dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} (1-x-\frac{y}{2})dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (2-2x-x(2-2x)-\frac{(2-2x)^2}{4})dx = \int\limits_0^1 (2-2x-2x+2x^2-1+2x-x^2) = \int\limits_0^1 (1-2x+x^2)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{(x-1)^3}{3} = \frac{1}{3}(0-(-1)) = \frac{1}{3}$$

Или

$$V_{пир} = \frac{1}{3} h S_{осн}$$

$$S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

$$h = 1$$

Тогда,

$$V_{пир} = \frac{1}{3}$$

$$\Pi_{полн} = \frac{1}{3}$$

2.) поток векторного поля F через внешнюю поверхность равен сумме потоков через все ее четыре грани.

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4$$

Где Π_1 - поток через грань ABC поток через грань OAB

Π_2 - поток через грань OCB

Π_3 - поток через грань OAC

Π_4 - поток через грань OAB

Найдем Π_1 - поток через грань OAB. Уравнение OAB: y=0. Внешняя нормаль к грани OAB $\vec{n} = -\vec{j}$. Поток через грань ABC найдем по формуле

$$\Pi = \iint\limits_\sigma \vec{F}\vec{n} d\sigma = \iint\limits_\sigma (F_x \cos\alpha + F_y \cos\beta + F_z \cos\gamma) d\sigma$$

Нормальный вектор плоскости 2x+y+2z=2 имеет координаты n=(2,1,2)Так как третья координата положительна, то вектор нормали образует с осью OZострый угол и $\cos(n,z)>0$.

Тогда $\vec{n}=\frac{\vec{n}}{|n|}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

Элемент площади $d\sigma=\frac{dxdx}{\cos\gamma}$

$$\Pi_1=\Pi_{ABC}=\iint_\sigma(\vec{F},\vec{n})d\sigma=\left|\begin{array}{l}\vec{F}=(z,x+y,y)\\ \vec{n}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\end{array}\right|=\iint_\sigma\left(\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}(x+y)+\frac{2}{3}y\right)d\sigma=\left|\begin{array}{l}\sigma:2x+y+2z=2\\ \cos\gamma=\frac{2}{3}\\ z=\frac{1}{2}(2-2x-y)\\ d\sigma=\frac{3}{2}dxdy\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}((2-2x-y)+(x+y)+2y)dxdy=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(2-x+2y)dxdy=\iint_{D_{xy}}(1-\frac{x}{2}+y)dxdy=$$

$$=\int_0^1dx\int_0^{2-2x}(1-\frac{x}{2}+y)dy=\int_0^1\left((2-2x-\frac{x(2-2x)}{2}+2(1-x)^2\right)dx=\int_0^1(3x^2-7x+4)dx=$$

$$=4x\Big|_0^1-\frac{7}{2}x^2\Big|_0^1+3\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=4-\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$$

2. Поток через грань OCB

Для грани OCB $(\vec{F}\cdot\vec{n}_0)_{OCB}=z$

$$\Pi_2=\Pi_{OCB}=\left|\begin{array}{l}x=0\\ \alpha=180^{0'}\\ \cos\alpha=-1\end{array}\right|=\iint_{D_{YOZ}}\frac{\vec{F}\cdot\vec{n}_0}{\cos\alpha}dydz=-\int_0^1zdz\int_0^{2-2z}dy=-\int_0^1z(2-2z)dz=-\frac{1}{3}$$

3. Поток через грань OAC

Для грани OAC $(\vec{F}\cdot\vec{n}_0)_{OCB}=y$

$$\Pi_3=\Pi_{OAC}=\left|\begin{array}{l}z=0\\ \gamma=180^{0'}\\ \cos\gamma=-1\end{array}\right|=\iint_{D_{YOZ}}\frac{\vec{F}\cdot\vec{n}_0}{\cos\gamma}dydx=-\int_0^2ydy\int_0^{1-\frac{y}{2}}dx=-\int_0^2y(1-\frac{y}{2})dy=-\frac{2}{3}$$

4. Поток через грань OAB

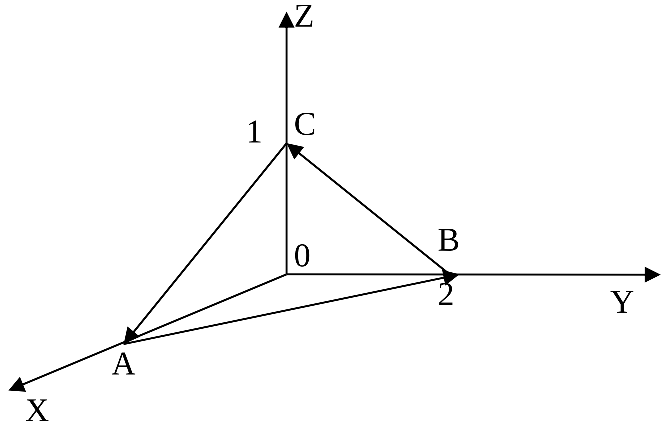
Для грани OAB $\left(\vec{F}\cdot\vec{n}_0\right)_{OCB} = x + y_{=0} = x$

$$\Pi_4 = \Pi_{OAB} = \left| \begin{matrix} y=0 \\ \beta = 180^{0'} \\ \cos\beta = -1 \end{matrix} \right| = \iint\limits_{D_{YOZ}} \frac{\vec{F}\cdot\vec{n}_0}{\cos\beta} dxdz = -\int_0^1 xdx \int_0^{1-x} dz = -\int_0^1 (x(1-x)dx = -\frac{1}{6}$$

Тогда:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Б) *Решение*. В результате пересечения плоскости (p) с координатными плоскостями получим треугольник ABC и укажем на нем положительное направление обхода контура $ABCA$.



1. Вычислим циркуляцию C данного поля по формуле:

$$C = \oint\limits_{ABCA} \vec{F}\cdot dS = \int\limits_{AB} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \int\limits_{BC} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \int\limits_{CA} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

На отрезке AB имеем: z=0, x+y/2=1, y=2(1-x), dy=-2dx

$$\vec{F} = z\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k}\,,\ d\vec{S} = dx\vec{i} + dy\vec{j} \Rightarrow \vec{F}d\vec{S} = zdx + (x+y)dy = (x+y)dy$$

$$\int\limits_{AB} \vec{F}d\vec{S} = -2\int_1^0 (x + (2-2x))dx = -2\int_1^0 (2-x)dx = -2(2(0-1) - (0-\frac{1}{2} =)) = 2\cdot\frac{3}{2} = 3$$

На отрезке BC: x=0, y/2+z=1, z=1-y/2, dz=-1/2dy

$$\vec{F} = z\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k}\,,\ d\vec{S} = dy\vec{j} + dz\vec{k} \Rightarrow \vec{F}d\vec{S} = ydy + ydz$$

$$\int_{BC} \vec{F}d\vec{S} = \int_2^0 (ydy + ydz) = \int_2^0 ydy - \frac{1}{2}\int_2^0 ydy = \frac{1}{2}\int_2^0 ydy = -1$$

На отрезке CA: y=0, x+z=1, dz=-dx

$$\vec{F} = z\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k}\,, d\vec{S} = dx\vec{i} + dy\vec{j} \Rightarrow \vec{F}d\vec{S} = zdx$$

$$\int_{CA} \vec{F}d\vec{S} = -\int_1^0 zdz = \frac{1}{2}$$

Тогда C=3-1+0,5=2,5

2. Вычислим циркуляцию данного поля с помощью формулы Стокса. Для этого вычислим:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y & y \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ z & x+y \end{vmatrix} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$$

Тогда $\left(rot\vec{F}\right)_x = 1$, $\left(rot\vec{F}\right)_y = 1$, $\left(rot\vec{F}\right)_z = 1$

Найдем циркуляцию по формуле Стокса

$$Ц = \iint_{D_{yoz}} dydz + \iint_{D_{xoz}} dxdz + \iint_{D_{xoy}} dxdy = S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAC} + S_{\Delta OAB}$$

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1$$

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1$$

$$Ц = 2{,}5$$

Ответ: $П = \frac{1}{3}$, $Ц = 2{,}5$