Задача. *Разложить в ряд Фурье по синусам функцию* $y = x^2$ *на отрезке* $[0;1]$.

Решение. Ряд Фурье для функции $y(x)$ на интервале $[-1;1]$ имеет вид:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \pi nx + b_n \sin \pi nx \right).$$

Так как строим ряд по синусам, то $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \pi nx$

Найдем коэффициенты разложения.

$$b_n = 2\int_0^1 y(x)\sin(\pi nx)dx = 2\int_0^1 x^2 \sin(\pi nx)dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \sin(\pi nx) & v = -\frac{1}{\pi n}\cos(\pi nx) \end{matrix} \right| =$$

$$= -2\frac{x^2}{\pi n}\cos(\pi nx)\Big|_0^1 + 2\frac{2}{\pi n}\int_0^1 x\cos(\pi nx)\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos(\pi nx) & v = \frac{1}{\pi n}\sin(\pi nx) \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos(\pi n) + \frac{4}{\pi n}\left[\frac{1}{\pi n} x\sin(\pi nx)\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \sin(\pi nx)\,dx \right] =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{4}{\pi n}\left[\frac{1}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^1 \right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{(\pi n)^3} = \frac{2(-1)^{n+1}(\pi n)^2 - 4 + 4(-1)^n}{(\pi n)^3}.$$

Получаем ряд Фурье:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}(\pi n)^2 - 4 + 4(-1)^n}{(\pi n)^3} \sin \pi nx.$$

Ответ: $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}(\pi n)^2 - 4 + 4(-1)^n}{(\pi n)^3} \sin \pi nx$