

Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом вариации

ЗАДАНИЕ. *Найти решение задачи Коши:*

$$y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}, \quad y(0) = 4 \ln 4, \quad y'(0) = 3(3 \ln 4 - 1).$$

РЕШЕНИЕ.

Решим сначала однородное уравнение

$$y'' - 3y' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0,$$

$$\lambda(\lambda - 3) = 0,$$

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 3$$

Решение будет иметь вид $y = C_1 e^{3x} + C_2$.

Пусть $C_1 = C_1(x); C_2 = C_2(x)$, тогда для нахождения частного решения необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{3x} + C_2'(x) = 0 \\ C_1'(x)(e^{3x})' + C_2'(x)(1)' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -e^{-3x}C_2'(x) \\ -e^{-3x}C_2'(x)3e^{3x} = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = e^{-3x} \frac{3e^{-3x}}{3 + e^{-3x}} \\ C_2'(x) = -\frac{3e^{-3x}}{3 + e^{-3x}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(x) = \int \frac{3e^{-6x}}{3 + e^{-3x}} dx \\ C_2(x) = -\int \frac{3e^{-3x}}{3 + e^{-3x}} dx \end{cases}$$

Вычислим оба интеграла

$$C_1(x) = \int \frac{3e^{-6x}}{3+e^{-3x}} dx = \left. \begin{array}{l} u = e^{-3x} \quad x = -\frac{1}{3} \ln u \\ dx = -\frac{1}{3} \frac{du}{u} \end{array} \right| = \int \frac{3u^2}{3+u} \left(-\frac{1}{3} \frac{du}{u} \right) = -\int \frac{udu}{3+u} =$$

$$= -\int \frac{3+u-3}{3+u} du = -\int \left(1 - \frac{3}{3+u} \right) du = -u + 3 \ln |u+3| + A_1 = -e^{-3x} + 3 \ln |e^{-3x} + 3| + A_1.$$

$$C_2(x) = -\int \frac{3e^{-3x}}{3+e^{-3x}} dx = \left. \begin{array}{l} u = e^{-3x} \quad x = -\frac{1}{3} \ln u \\ dx = -\frac{1}{3} \frac{du}{u} \end{array} \right| = -\int \frac{3u}{3+u} \left(-\frac{1}{3} \frac{du}{u} \right) = \int \frac{du}{3+u} =$$

$$= \ln |u+3| + A_2 = \ln |e^{-3x} + 3| + A_2.$$

Значит, общее решение имеет вид:

$$y = C_1(x)e^{3x} + C_2(x) =$$

$$= (-e^{-3x} + 3 \ln |e^{-3x} + 3| + A_1)e^{3x} + \ln |e^{-3x} + 3| + A_2 =$$

$$= -1 + 3e^{3x} \ln |e^{-3x} + 3| + \ln |e^{-3x} + 3| + A_1 e^{3x} + A_2.$$

Найдем частное решение из начальных условий $y(0) = 4 \ln 4$, $y'(0) = 3(3 \ln 4 - 1)$.

Найдем производную:

$$y' = C_1'(x)e^{3x} + 3C_1(x)e^{3x} + C_2'(x) = \frac{3e^{-6x}}{3+e^{-3x}}e^{3x} + 3e^{3x}(-e^{-3x} + 3 \ln |e^{-3x} + 3| + A_1) - \frac{3e^{-3x}}{3+e^{-3x}}.$$

Подставляем $x=0$ в y и y' :

$$\begin{cases} y(0) = -1 + 3 \ln |1+3| + \ln |1+3| + A_1 + A_2 = 4 \ln 4; \\ y'(0) = \frac{3}{3+1} + 3(-1 + 3 \ln |1+3| + A_1) - \frac{3}{3+1} = 3(3 \ln 4 - 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 + 4 \ln 4 + A_1 + A_2 = 4 \ln 4; \\ (-1 + 3 \ln 4 + A_1) = (3 \ln 4 - 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = 1; \\ A_1 = 0. \end{cases}$$

Искомое частное решение:

$$y(x) = 3e^{3x} \ln |e^{-3x} + 3| + \ln |e^{-3x} + 3|.$$

ОТВЕТ. $y(x) = 3e^{3x} \ln |e^{-3x} + 3| + \ln |e^{-3x} + 3|..$