Задача с решением по численным методам
Тема: приближенное решение нелинейных уравнений

Задание.

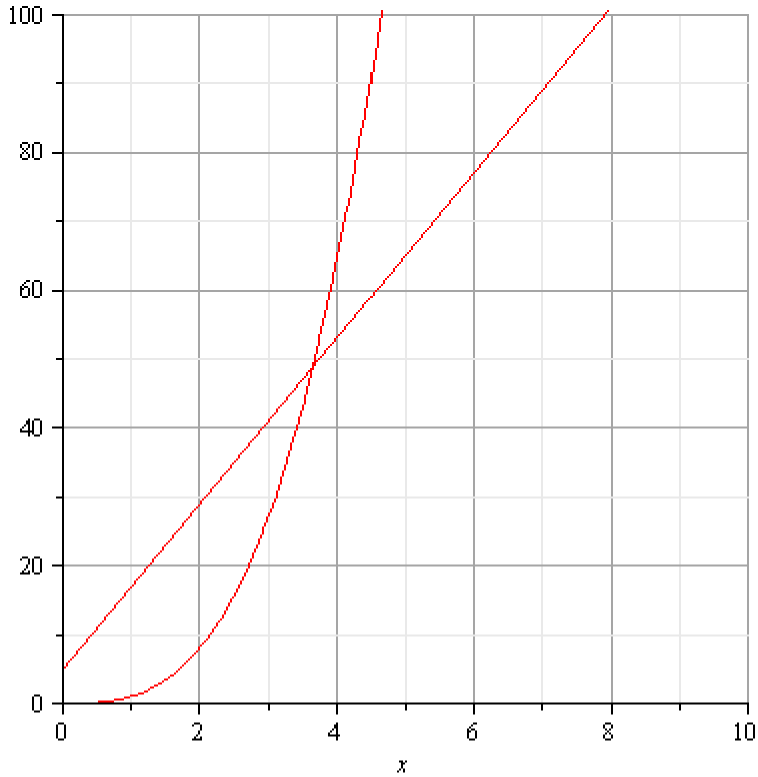
Решить нелинейные уравнения с точностью до 0.001.

$$5)\ x^3 - 12x - 5 = 0 \quad (x > 0); \quad 5.a)\ \operatorname{tg} x - \frac{1}{x} = 0$$

Решение.

$\underline{5)\ x^3 - 12x - 5 = 0\ (x > 0)}$

Запишем уравнение в виде $x^3 = 12x + 5$ и отделим корень графически, построив эскизы графиков $y_1 = x^3$ и $y_2 = 12x + 5$. При $x > 0$ имеем одну точку пересечения:



Итак, искомый корень $x \in [3; 4]$.

Для уточнения корня используем метод Ньютона.

$$f(x) = x^3 - 12x - 5$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f(x) \cdot f''(x) = 6x(x^3 - 12x - 5)$$

В качестве начального приближения выберем точку, для которой выполняется $f(x) \cdot f''(x) > 0$.

Для $x = 4$:

$$f(x) \cdot f''(x) = 6x(x^3 - 12x - 5) = 24(64 - 48 - 5) > 0$$

Выберем в качестве начального приближения $x_0 = 4$.

Дальнейшие приближения будем вычислять по реккурентной формуле:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{4^3 - 12 \cdot 4 - 5}{3 \cdot 4^2 - 12} = 4 - \frac{11}{36} = 3.6944$$

Для проверки окончания итерационного процесса используем условие

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

$$|x_k - x_{k-1}| < 0.001$$

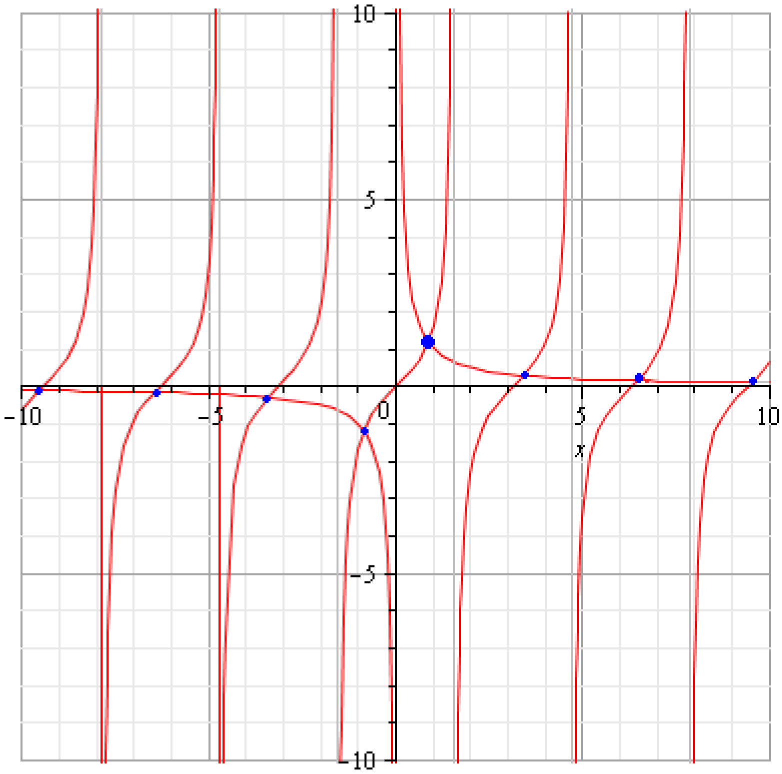
Приведем вычисления в таблице:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	
0	4	11	36	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
1	3,6944	1,0918	28,9468	0,3056
2	3,6567	0,0157	28,1149	0,0377
3	3,6562			0,0006

Итак, с заданной точностью получили: $x \approx 3.6562$

$$\underline{5. a)\ \operatorname{tg} x - \frac{1}{x} = 0}$$

Отделим корни графически, построив графики функций $y_1 = \operatorname{tg} x$ и $y_2 = \frac{1}{x}$:



Очевидно, уравнение имеет бесконечное множество корней. Найдем корень, принадлежащий отрезку $[0; 1]$.

$$f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} - \frac{2}{x^3}$$

В качестве начального приближения выберем точку, для которой выполняется $f(x) \cdot f''(x) > 0$.

Для $x = 1$:

$$\left(\frac{2\sin 1}{\cos^3 1} - \frac{2}{x^3}\right)\left(\operatorname{tg} 1 - \frac{1}{1}\right) \approx 8.7 > 0$$

Выберем в качестве начального приближения $x_0 = 1$.
Дальнейшие приближения будем вычислять по реккурентной формуле:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

Для проверки окончания итерационного процесса используем условие

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

$$|x_k - x_{k-1}| < 0.001$$

Приведем вычисления в таблице:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	
0	1,0000	0,5574	4,4255	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
1	0,8740	0,0510	3,7372	0,1260
2	0,8604	0,0002	3,7022	0,0136
3	0,8603			0,0001

Так как $y_1 = \operatorname{tg} x$ и $y_2 = \frac{1}{x}$ - нечетные функции, то $x \approx -0.8603$ тоже является корнем уравнения с точностью 0.001

ОТВЕТ. 5) $x \approx 3.6562$; $5.a)$ $x \approx \pm 0.8603$.