

Задача с решением по численным методам
Тема: численное решение задачи Коши методами Эйлера

ЗАДАНИЕ.

Используя 1) метод Эйлера и 2) модифицированный метод Эйлера, найдите приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = 0.1$. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.

$$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{10}}, \quad y_0(0.6) = 0.8, \quad x \in [0.6; 1.6]$$

РЕШЕНИЕ.

1) Заданный интервал $[0.6; 1.6]$ разобьем на $n = 10$ равных частей длины $h = 0.1$. Значения неизвестной функции $y(x)$ в точках x_i ($i = 1..n$) находятся по рекуррентной формуле

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

Имеем

$$y_0 = y(x_0) = y(0.6) = 0.8$$
$$y_{i+1} = y_i + 0.1 \cdot \left(x_i + \cos \frac{y_i}{\sqrt{10}} \right)$$

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$
0	0,6	0,8	1,5682
1	0,7	0,9568	1,6546
2	0,8	1,1223	1,7377
3	0,9	1,2960	1,8172
4	1	1,4778	1,8928
5	1,1	1,6670	1,9642
6	1,2	1,8635	2,0313
7	1,3	2,0666	2,0940
8	1,4	2,2760	2,1520
9	1,5	2,4912	2,2054
10	1,6	2,7117	

2) При решении методом Эйлера-Коши вначале вычисляется нулевое приближение

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$$

затем приближение уточняется

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{h_i}{2} \left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}) \right)$$

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$y_i^{(0)}$	$f(x_i, y_i^{(0)})$
-----	-------	-------	---------------	-------------	---------------------

0	0,6	0,8	1,5682		
1	0,7	0,9611	1,6542	0,9568	1,6546
2	0,8	1,1307	1,7368	1,1266	1,7372
3	0,9	1,3084	1,8156	1,3044	1,8161
4	1	1,4937	1,8905	1,4899	1,8910
5	1,1	1,6863	1,9612	1,6827	1,9617
6	1,2	1,8858	2,0274	1,8824	2,0280
7	1,3	2,0916	2,0891	2,0885	2,0897
8	1,4	2,3034	2,1462	2,3005	2,1468
9	1,5	2,5207	2,1988	2,5180	2,1994
10	1,6	2,7430	2,2468	2,7406	2,2474

ОТВЕТ.

x	y (Эйлера)	y (Эйлера-Коши)
0,6	0,8	0,8
0,7	0,9568	0,9611
0,8	1,1223	1,1307
0,9	1,2960	1,3084
1	1,4778	1,4937
1,1	1,6670	1,6863
1,2	1,8635	1,8858
1,3	2,0666	2,0916
1,4	2,2760	2,3034
1,5	2,4912	2,5207
1,6	2,7117	2,7430