Пример решения задачи: тройной интеграл для вычисления объема

Задание.

Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^2+y^2+z^2=2x+3y$

Решение.

$$x^2-2x+1+y^2-2\cdot y\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+z^2=1+\frac{9}{4}$$
$$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=\frac{13}{4}$$

Цилиндрическая система координат.

$$\begin{cases} x=1+r\cos\varphi \\ y=\dfrac{3}{2}+r\sin\varphi \\ z=z \end{cases};\quad dxdydz=r\,drd\varphi dz$$

Уравнение поверхности примет вид

$$r^2+z^2=\frac{13}{4}$$

$$V=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{13}/2}dr\int_0^{\sqrt{\frac{13}{4}-r^2}}rdz$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{13}{4}-r^2}}rdz=r\sqrt{\frac{13}{4}-r^2}$$

$$\int_0^{\sqrt{13}/2}r\sqrt{\frac{13}{4}-r^2}dr=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{13}{4}-r^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{13}/2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{13\sqrt{13}}{8}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\cdot\frac{13\sqrt{13}}{8}d\varphi=\frac{13\sqrt{13}}{24}\cdot2\pi=\frac{13\sqrt{13}}{12}\pi$$

$$V=2\cdot\frac{13\sqrt{13}}{12}\pi=\frac{13\sqrt{13}}{6}\pi$$

Сферическая система координат.

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi\sin\theta \\ y = \dfrac{3}{2} + r\sin\varphi\sin\theta \\ \quad z = r\cos\theta \end{cases}; \quad dxdydz = r^2\sin\theta\ drd\varphi d\theta$$

Уравнение поверхности примет вид $r = \sqrt{13}/2$,

$$V = \int_0^{\pi} dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{13}/2} r^2\sin\theta\,dr$$

$$\int_0^{\sqrt{13}/2} r^2\sin\theta\,dr = \frac{1}{3}\sin\theta\cdot\frac{13\sqrt{13}}{8}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\sin\theta\cdot\frac{13\sqrt{13}}{8}d\varphi = \frac{13\sqrt{13}}{12}\pi\sin\theta$$

$$\int_0^{\pi}\frac{13\sqrt{13}}{12}\pi\sin\theta\,dt = -\frac{13\sqrt{13}}{12}\pi\cos\theta\Big|_0^{\pi} = -\frac{13\sqrt{13}}{12}\pi(\cos\pi - \cos 0)$$

$$= \frac{13\sqrt{13}}{6}\pi$$

Ответ.

$$\frac{13\sqrt{13}}{6}\pi$$