МИРЭА. Типовой расчет по математическому анализу

Контрольные задания по теме Пределы, производные

Вариант 8

Задача 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{8x^3+3x^2}+7}{3x-6}$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+3x^2}+7}{3x-6}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt[3]{8+3/x}+7/x\right)}{x(3-6/x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{8+3/x}+7/x\right)}{(3-6/x)}=\frac{\left(\sqrt[3]{8+0}+0\right)}{(3-0)}=\frac{2}{3}.$$

Задача 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, используя второй замечательный предел $f(x)=(1+3\sin x)^{2\operatorname{ctg}3x}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(1+3\sin x)^{2\operatorname{ctg}3x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left((1+3\sin x)^{\frac{1}{3\sin x}}\right)^{2\operatorname{ctg}3x\cdot 3\sin x}=\left|\text{т.к. } (1+t)^{1/t}\to e,\ t\to 0\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{2\operatorname{ctg}3x\cdot 3\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{6\frac{\cos 3x\cdot\sin x}{\sin 3x}}=\lim_{x\to 0}e^{6\cos 3x\frac{3x}{\sin 3x}\frac{\sin x}{x}\frac{x}{3x}}=\left|\text{т.к. } \frac{\sin t}{t}\to 1,\ t\to 0\right|=\lim_{x\to 0}e^{6\cos 3x\frac{1}{3}}=e^2.$$

Задача 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ с помощью замены бесконечно малых на эквивалентные.

$$f(x)=\frac{(1-\cos 2x)^2}{\operatorname{tg}^2 2x-\sin^2 2x}$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)^2}{\operatorname{tg}^2 2x-\sin^2 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Если сразу применить эквивалентности $\operatorname{tg} x \sim x,\ \sin x \sim x,\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ при $x \to 0$, то все равно получится неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, поэтому сначала упростим предел

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)^2}{\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}-\sin^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)^2\cos^2 2x}{\sin^2 2x\left(1-\cos^2 2x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)^2\cos^2 2x}{\sin^4 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{1}{2}(2x)^2\right]^2\cos^2 2x}{(2x)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x}{4}=\frac{1}{4}.$$

Задача 4. Найти точки разрыва функции. Определить характер разрывов.

$$y=\frac{\sqrt{a+bx}-c}{x^2-k^2},\ a=5, b=1, c=2, k=1.$$

Решение. Запишем функцию:

$$y=\frac{\sqrt{5+x}-2}{x^2-1^2}=\frac{\sqrt{5+x}-2}{(x-1)(x+1)}.$$

Получаем две точки, подозрительные на разрыв: $x_1=1$, $x_2=-1$.

Исследуем непрерывность в этих точках.

Пусть $x_1 = 1$. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 1\pm 0} \frac{\sqrt{5+x}-2}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{\sqrt{6}-2}{\pm 0}\right) = \pm\infty.$$

Пределы слева и справа бесконечны, поэтому в точке $x_1 = 1$ функция терпит разрыв второго рода.

Пусть $x_2 = -1$. Вычислим предел

$$\lim_{x\to -1\pm 0} \frac{\sqrt{5+x}-2}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -1\pm 0} \frac{\left(\sqrt{5+x}-2\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)} = \lim_{x\to -1\pm 0} \frac{(5+x-4)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1\pm 0} \frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)} = \lim_{x\to -1\pm 0} \frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)} = -\frac{1}{8}.$$

Пределы слева и справа конечны и равны, поэтому в точке $x_2 = -1$ функция непрерывна.

Задача 5. Найти производную функции $f(x)$

$$f(x) = \sqrt[7]{1-3x} - \frac{1}{1+\cos x} + \left(\frac{1}{x}\right)^x.$$

Решение.

$$f(x)=\sqrt[7]{1-3x}-\frac{1}{1+\cos x}+\left(\frac{1}{x}\right)^{x}=(1-3x)^{1/7}-(1+\cos x)^{-1}+e^{x\ln(1/x)}$$

Тогда производная:

$$f'(x)=\frac{1}{7}(1-3x)^{1/7-1}\cdot(1-3x)'-(-1)(1+\cos x)^{-1-1}\cdot(1+\cos x)'+e^{x\ln(1/x)}\left(x\ln(1/x)\right)'=$$

$$=-\frac{3}{7}(1-3x)^{-6/7}+(1+\cos x)^{-2}\cdot(-\sin x)+\left(\frac{1}{x}\right)^{x}\left(\ln(1/x)+x\cdot x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)=$$

$$=-\frac{3}{7(1-3x)^{6/7}}+\frac{-\sin x}{(1+\cos x)^2}+\left(\frac{1}{x}\right)^{x}\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)-1\right).$$

Задача 6. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x=x(t)=t^2+\cos(t+2), \\ y=y(t)=e^t\sin 2t. \end{cases}$$

Решение.

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{e^t\sin 2t+e^t 2\cos 2t}{2t-\sin(t+2)}=\frac{e^t\left(\sin 2t+2\cos 2t\right)}{2t-\sin(t+2)}.$$

Задача 7. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ неявной функции, заданной уравнением $f(x,y)=0$.

$$f(x,y)=\ln(x-2y)+x^2y.$$

Решение. Дифференцируем обе части соотношения $\ln\left(x-2y\right)+x^2y=0$ и выражаем $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

$$\left(\ln\left(x-2y\right)+x^2y\right)'=0,$$

$$\frac{1-2y'}{\left(x-2y\right)}+2xy+x^2y'=0,$$

$$y'\left(\frac{-2}{\left(x-2y\right)}+x^2\right)=-2xy-\frac{1}{\left(x-2y\right)},$$

$$y'\left(\frac{-2+x^3-2x^2y}{\left(x-2y\right)}\right)=\frac{-2x^2y+4xy^2-1}{\left(x-2y\right)},$$

$$y'=\frac{-2x^2y+4xy^2-1}{-2+x^3-2x^2y}.$$

Задача 8. Вычислить с помощью дифференциала приближенное значение числа $a=(0,85)^{-2/3}$.

Решение. Введем функцию $y(x)=x^{-2/3}$.

Используем формулу $y(a)\approx y(x_0)+dy=y(x_0)+y'(x_0)dx=y(x_0)+y'(x_0)(a-x_0)$, где выберем $a=0,85$, $x_0=1$.

Тогда $y(x_0)=1^{-2/3}=1$,

$$y'(x)=-\frac{2}{3}x^{-5/3},\ y'(x_0)=-\frac{2}{3}1^{-5/3}=-\frac{2}{3},$$

$$a-x_0=0,85-1=-0,15.$$

Подставляем:

$$(0,85)^{-2/3} = y(a) \approx 1 - \frac{2}{3} \cdot (-0,15) = 1,1$$

Задача 9. Определить, в каких точках заданной линии L касательная к этой линии параллельна прямой $y = kx$, и написать уравнение этой касательной.

$L: y = x - \sqrt{x}$, $k = 0$.

Решение. По определению $k = y'(x_0)$.

Найдем производную

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$$

Приравниваем к $k = 0$ и получаем:

$$y' = \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = 0,$$
$$2\sqrt{x} - 1 = 0,$$
$$2\sqrt{x} = 1,$$
$$\sqrt{x} = 1/2,$$
$$x = 1/4.$$

Получаем, что касательная проведена в точке $x_0 = 1/4$. Уравнение касательной:

$$y - y(x_0) = k(x - x_0),$$
$$y - (-1/4) = 0,$$
$$y = -1/4.$$