МЭСИ
Индивидуальное домашнее задание

Часть 1. Теория вероятностей

К=6

1. Вероятность того, что в страховую компанию в течение года обратится с иском о возмещении ущерба первый клиент, равна (15+***k***)/100. Для второго клиента вероятность такого обращения равна (20+***k***)/100. Для третьего клиента - (10+***k***)/100. Найти вероятность того, что в течение года в страховую компанию обратится хотя бы один клиент, если обращения клиентов - события независимые.

1. Вероятность того, что в страховую компанию в течение года обратится с иском о возмещении ущерба первый клиент, равна 21/100. Для второго клиента вероятность такого обращения равна 26/100. Для третьего клиента - 16/100. Найти вероятность того, что в течение года в страховую компанию обратится хотя бы один клиент, если обращения клиентов - события независимые.

Решение. Введем независимые события:

A_i = {В течение года в страховую компанию обратится i-ый клиент}, $i=1,2,3$.

По условию известны вероятности $P(A_1)=0,21$, $P(A_2)=0,26$, $P(A_3)=0,16$.

Введем событие A = {В течение года в страховую компанию обратится хотя бы один клиент} и противоположное ему событие $\overline{A}$ = {В течение года в страховую компанию не обратится ни один клиент}.

Подсчитаем вероятность события $\overline{A}$. Оно произойдет, если в течение года в СК не обратится ни первый, ни второй, ни третий клиент, то есть $\overline{A}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$, соответствующая вероятность (по

правилу умножения вероятностей)

$$P(\overline{A})=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})=(1-0,21)(1-0,26)(1-0,16)\approx 0,491$$

Тогда вероятность искомого события

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,491=0,509.$

Ответ. 0,509.

2. В магазин поступают телевизоры с трех заводов: (30+***k***)% с первого завода, (25+***k***)% - со второго, остальные с третьего. При этом первый завод выпускает (2+***k***)% телевизоров со скрытым дефектом, второй, соответственно, (1+***k***)%, а третий - (3+***k***)%.

а) Какова вероятность приобрести исправный телевизор в этом магазине?

б) Если в телевизоре обнаружен дефект, то на каком заводе, скорее всего, изготовлен этот телевизор?

2. В магазин поступают телевизоры с трех заводов: 36% с первого завода, 31% - со второго, остальные с третьего. При этом первый завод выпускает 8% телевизоров со скрытым дефектом, второй, соответственно, 7%, а третий - 9%.

а) Какова вероятность приобрести исправный телевизор в этом магазине?

б) Если в телевизоре обнаружен дефект, то на каком заводе, скорее всего, изготовлен этот телевизор?

Решение. Введем полную группу гипотез:

$H1$ = (Телевизор с 1 завода),

$H2$ = (Телевизор со 2 завода),

$H3$ = (Телевизор с 3 завода).

По условию известны вероятности $P(H1)=0,36$, $P(H2)=0,31$,

$P(H3)=1-0,36-0,31=0,33$.

Введем событие A = (Телевизор со скрытым дефектом). По условию известны априорные вероятности: $P(A|H1)=0,08$, $P(A|H2)=0,07$, $P(A|H3)=0,09$.

А) Вероятность события А найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(A|H1)P(H1)+P(A|H2)P(H2)+P(A|H3)P(H3)=$$

$$=0,36\cdot 0,08+0,31\cdot 0,07+0,33\cdot 0,09=0,0802.$$

Тогда вероятность события $\overline{A}$ = (Телевизор исправный) равна

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,0802=0,9198.$

Б) Вероятность того, что телевизор изготовлен на i-ом заводе ($i=1,2,3$), если в нем обнаружен дефект, найдем по формуле Байеса:

$$P(H1\,|\,A)=\frac{P(H1)P(A\,|\,H1)}{P(A)}=\frac{0,36\cdot 0,08}{0,0802}\approx 0,359,$$

$$P(H2\,|\,A)=\frac{P(H2)P(A\,|\,H2)}{P(A)}=\frac{0,31\cdot 0,07}{0,0802}\approx 0,271,$$

$$P(H3\,|\,A)=\frac{P(H3)P(A\,|\,H3)}{P(A)}=\frac{0,33\cdot 0,09}{0,0802}\approx 0,370.$$

Вероятнее всего, телевизор изготовлен на третьем заводе.

Ответ: а) 0,9198; б) на третьем заводе.

3. При данном технологическом процессе (75+***k***)% всех сходящих с конвейера автозавода автомобилей – цвета «металлик». Найти вероятность того, что:
а) из 5 случайно отобранных автомобилей будет 4 цвета «металлик».
б) из (200+10****k***) проданных автомобилей будет не менее (140+10****k***) цвета «металлик».

3. При данном технологическом процессе 81% всех сходящих с конвейера автозавода автомобилей – цвета «металлик». Найти вероятность того, что:
а) из 5 случайно отобранных автомобилей будет 4 цвета «металлик».
б) из 260 проданных автомобилей будет не менее 200 цвета «металлик».

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами $p=81\%=0,81$ (вероятность того, что автомобиль будет цвета «металлик»), $q=1-p=1-0,89=0,19$.

А) Так как $n=5$ достаточно мало, будем использовать точную формулу Бернулли: $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ для $k=4$. Получаем:

$$P_5(4)=C_5^4\cdot 0,81^4\cdot 0,19^1=5\cdot 0,81^4\cdot 0,19\approx 0,409.$$

Б) Так как $n=260$ достаточно велико, будем использовать приближенную формулу: интегральную теорему Лапласа: $P_n(m1,m2)\approx\Phi\left(\frac{m2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m1-np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $m1=200$, $m2=260$, Ф – функция Лапласа (значения берутся из таблиц).

Получаем:

$$P_{260}(200,260)\approx\Phi\left(\frac{260-260\cdot 0,81}{\sqrt{260\cdot 0,81\cdot 0,19}}\right)-\Phi\left(\frac{200-260\cdot 0,81}{\sqrt{260\cdot 0,81\cdot 0,19}}\right)=\Phi(7,81)-\Phi(-1,68)=$$
$$=\Phi(7,81)+\Phi(1,68)=0,5+0,4531=0,9531.$$

Ответ: а) 0,409; б) 0,9531.

4. Для подготовки к экзамену студенту нужна определенная книга, которая может находиться в каждой из 4-х доступных студенту библиотек с вероятностью (0,3+0,01****k***). Составить закон распределения дискретной случайной величины *X* - числа посещённых библиотек. Обход прекращается после получения нужной книги или посещения всех четырех библиотек. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

4. Для подготовки к экзамену студенту нужна определенная книга, которая может находиться в каждой из 4-х доступных студенту библиотек с вероятностью 0,36. Составить закон распределения дискретной случайной величины *X* - числа посещённых библиотек. Обход прекращается после получения нужной книги или посещения всех четырех библиотек. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Пусть X - дискретная случайная величина, равная числу посещенных библиотек. Подразумевается, что студент прекращает посещение библиотек или если находит книгу, или если пройдены все четыре библиотеки. X может принимать значения 1, 2, 3 и 4. Найдем соответствующие вероятности.

$X=1$, если книга будет найдена в первой же библиотеке, вероятность этого равна 0,32, поэтому $P(X=1)=0,36$.
$X=2$, если книга не будет найдена в первой библиотеке (вероятность 0,64) и будет найдена во второй (вероятность 0,36), поэтому $P(X=2)=0,64\cdot 0,36=0,2304$.

$X=3$, если книга не будет найдена в первой и второй библиотеках (вероятность 0,64) и будет найдена в третьей (вероятность 0,36), поэтому
$P(X=3)=0,64\cdot 0,64\cdot 0,36=0,147456\approx 0,147$.
$X=4$, если книга не будет найдена ни в первой, ни во второй, ни в третьей библиотеках, студент пойдет в четвертую, поэтому
$P(X=4)=0,64\cdot 0,64\cdot 0,64=0,262144\approx 0,262$.

Получили закон распределения X:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,36	0,2304	0,147	0,262

Математическое ожидание: $MX=\sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 2,31$. То есть, в среднем студент посетит 2,31 библиотеки.

Дисперсия: $DX=\sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - (MX)^2 = 6,797-2,31^2\approx 1,47$.
Расчеты в таблице ниже:

x_i	1	2	3	4	**Сумма**
p_i	0,36	0,2304	0,147	0,262	**0,999**
$x_i p_i$	0,36	0,4608	0,441	1,048	**2,310**
$x_i^2 p_i$	0,36	0,9216	1,323	4,192	**6,797**

5. В нормально распределенной совокупности (15+***k***)% значений ***X*** меньше (11+***k***) и (45+***k***)% значений ***X*** больше (17+***k***). Найти параметры этой совокупности (μ, σ).

5. В нормально распределенной совокупности 21% значений ***X*** меньше 17 и 51% значений ***X*** больше 23. Найти параметры этой совокупности (μ, σ).

Решение. Используем известную формулу для нормально распределенной случайной величины
$$P(\alpha < X < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Получаем:

$$\begin{cases} P(-\infty < X < 17) = \Phi\left(\dfrac{17-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{-\infty - a}{\sigma}\right) = 0,21, \\ P(23 < X < \infty) = \Phi\left(\dfrac{\infty - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{23-a}{\sigma}\right) = 0,51; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{17-a}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = 0,21, \\ \Phi(\infty) - \Phi\left(\dfrac{23-a}{\sigma}\right) = 0,51; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{17-a}{\sigma}\right) 0,5 = 0,21, \\ 0,5 - \Phi\left(\dfrac{23-a}{\sigma}\right) = 0,51; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{17-a}{\sigma}\right) = -0,29, \\ \Phi\left(\dfrac{23-a}{\sigma}\right) = -0,01; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi\left(-\dfrac{17-a}{\sigma}\right) = 0,29, \\ \Phi\left(-\dfrac{23-a}{\sigma}\right) = 0,01; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{17-a}{\sigma} \approx 0,81, \\ -\dfrac{23-a}{\sigma} \approx 0,025; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \approx 23,2, \\ \sigma \approx 7,6. \end{cases}$$

Получили параметры распределения:
Математическое ожидание $\mu = a = 23,2$
Среднее квадратическое отклонение $\sigma = 7,6.$